

NGUYỄN HỮU NGỌC

# CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HÌNH HỌC 10

(TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM)

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH TOÁN 10 CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



## § 1. VECTƠ – CÁC PHÉP TÍNH VECTƠ

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

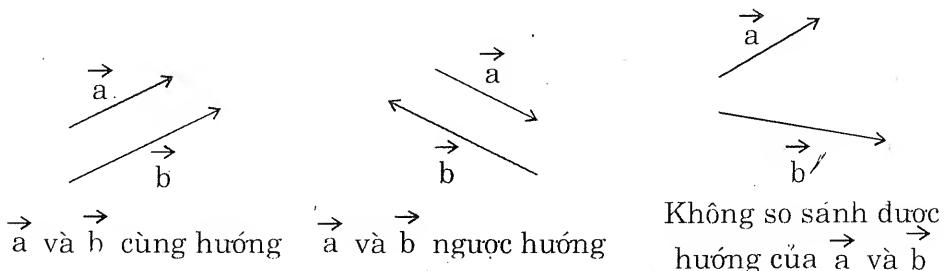
#### 1. Các định nghĩa

##### a. Vectơ

- Vectơ là một đoạn thẳng định hướng.
- Cho đoạn thẳng  $AB$ , ta được hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA}$ .

##### b. Vectơ cùng phương - Vectơ cùng hướng

- Giá của một vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau (còn gọi là hai vectơ song song).
- Khi hai vectơ đã cùng phương, nếu chiều hướng từ gốc đến ngọn của hai vectơ đó giống nhau, ta bảo hai vectơ cùng hướng ; trường hợp ngược lại, ta gọi là ngược hướng.



### c. Độ dài của vector

= Độ dài của một vector là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu là hai đầu mút của vector đó.

- Độ dài của vector  $\overline{AB}$  kí hiệu là  $|\overline{AB}|$  hoặc  $AB$ .
- Vector đơn vị là vector có độ dài bằng 1.

### d. Hai vector bằng nhau, đối nhau

- Hai vector bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau.
- Hai vector đối nhau nếu chúng ngược hướng và có độ dài bằng nhau.

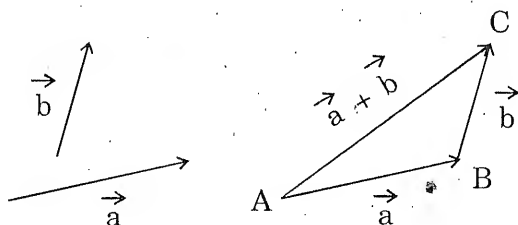
### e. Vector - không

- Vector - không, kí hiệu  $\vec{0}$ , là vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- Vector - không có độ dài bằng 0.

## 2. Phép cộng, phép trừ hai vector

### a. Phép cộng hai vector

- Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , từ điểm A tùy ý, vẽ  $\overline{AB} = \vec{a}$  và  $\overline{BC} = \vec{b}$ . Vector  $\overline{AC}$  là vector tổng của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- Kí hiệu :  $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b} = \overline{AB} + \overline{BC}$ .



### b. Tính chất của phép cộng vector

Với mọi vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  :

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (tính giao hoán).
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (tính kết hợp).
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  (tính chất vector - không).



### **c. Phép trừ hai vector**

Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Phép trừ của  $\vec{a}$  cho  $\vec{b}$  là phép cộng của  $\vec{a}$  với vector đối của  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

## **3. Phép nhân một số với một vector**

### **a. Định nghĩa**

Cho số  $k \neq 0$  và vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của số  $k$  với vector  $\vec{a}$ , kí hiệu  $k\vec{a}$  là vector  $\vec{b}$  sao cho :

- $\vec{b}$  cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ ,
- $\vec{b}$  ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$ ,
- $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$ .

### **b. Tính chất phép nhân một số với một vector**

Với mọi vector  $\vec{a}, \vec{b}$  và mọi số  $m, p$  ta có :

- $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ .
- $(m + p)\vec{a} = m\vec{a} + p\vec{a}$ .
- $m(p\vec{a}) = (mp)\vec{a}$ .
- $(1)\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$ .
- $(0)\vec{a} = \vec{0}, (m)\vec{0} = \vec{0}$ .

### **c. Điều kiện để hai vector cùng phương**

Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  với  $\vec{b} \neq \vec{0}$ .

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \exists k : \vec{a} = k\vec{b}.$$

## **4. Các quy tắc về vector**

### **a. Quy tắc hình bình hành**

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \end{cases}$$

### **b. Quy tắc ba điểm**

Với ba điểm A, B, C bất kì ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \end{cases}$$

### c. Quy tắc trung điểm

M là trung điểm đoạn AB và O là điểm tùy ý, ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \end{cases}$$

### d. Quy tắc trọng tâm

G là trọng tâm  $\triangle ABC$  và M là điểm tùy ý, ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \end{cases}$$

## B. CÁC DẠNG TOÁN

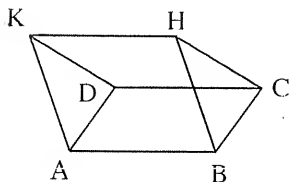
### Dạng 1. CHỨNG MINH HAI VECTO BẰNG NHAU, HAI VECTO ĐỐI NHAU

#### Phương pháp

Để chứng minh hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối nhau, ta có thể sử dụng định nghĩa và quy tắc hình bình hành.

**Ví dụ 1.** ABCD và ABHK là hai hình bình hành (hbh) tùy ý trong mặt phẳng. Chứng minh :  $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DK}$ .

#### Giải



$$\left. \begin{array}{l} \text{ABCD là hbh} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \text{ABHK là hbh} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KH} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{KH}$$

$$\Rightarrow \text{DCHK là hbh}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DK}.$$

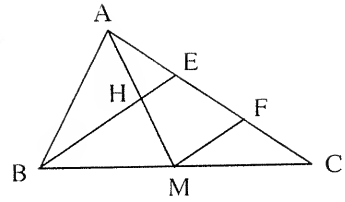
**Ví dụ 2.** Gọi M là trung điểm cạnh BC của  $\triangle ABC$  và H là trung điểm của AM. BH cắt AC tại E. Chứng minh  $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ .

### Giải

Kẻ  $MF \parallel BE$ .

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BEC : FE = FC \\ \triangle AMF : EA = EF \end{array} \right\} \Rightarrow AE = EF = FC.$$

Các vectơ  $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FC}$  cùng hướng  
và cùng độ dài nên bằng nhau. Vậy  $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ .



**Ví dụ 3.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi AD là đường kính đường tròn và H là trực tâm tam giác. HD gặp BC tại M. Chứng minh  $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{DC}$  và  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ .

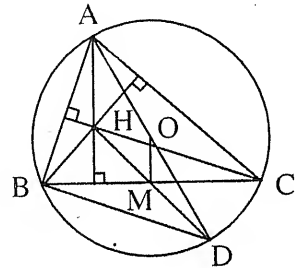
### Giải

$BH \parallel DC$  (cùng vuông góc với AC).

$CH \parallel BD$  (cùng vuông góc với AB).

Vậy BHCD là hbh  $\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{DC}$ .

$\triangle AHD$  có OM là đường trung bình, nên  
 $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}$ .



## Dạng 2. CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTOR

### Phương pháp

- Sử dụng các quy tắc vector, biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản.
- Cũng có khi biến đổi cả hai vế cho ra cùng chung một kết quả.
- Có thể sử dụng phép tương đương dẫn đến một mệnh đề đúng.

**Ví dụ 1.** Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}.$$

### Giải

Ta thực hiện phép biến đổi vế trái thành vế phải :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}.$$

**Ví dụ 2.** Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}. \quad (*)$$

**Giải:**

$$\text{Ta có : } (*) \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}}_{\overrightarrow{AD}} = \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}}_{\overrightarrow{AD}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \text{ (đúng)}.$$

Vậy (\*) được chứng minh.

**Ví dụ 3.** Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB và CD. Chứng minh :  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ .

**Giải**

$$\triangle MCD : \quad 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}. \quad (1)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= \underbrace{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}} + \underbrace{\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD}} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \\ &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

Tương tự :

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$$

Suy ra điều phải chứng minh (đpcm).

**Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC với ba trung tuyến là AM, BN, CQ. Chứng minh  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CQ} = \vec{0}$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CQ} &= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})] \\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}}_{\vec{0}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

### Dạng 3. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

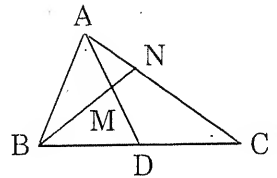
#### Phương pháp

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ thẳng hàng} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \quad (k \neq 0). \end{aligned}$$

**Ví dụ 1.** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến  $AD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AD$ . Xét điểm  $N$  cho bởi  $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}$ . Chứng minh  $B, M, N$  thẳng hàng.

**Giải**

$$\begin{aligned} \triangle BAD : \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}. \end{aligned} \tag{1}$$



$$\begin{aligned} \triangle ABN : \\ \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}. \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có :  $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow B, M, N$  thẳng hàng.

**Ví dụ 2.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$  và  $O$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Vẽ  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ . Chứng minh  $D, G, M$  thẳng hàng.

**Giải**

Vì  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$  nên

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}. \tag{1}$$

Gọi  $E$  là giao điểm của  $AM$  và  $DO$  thì  $OM$  là đường trung

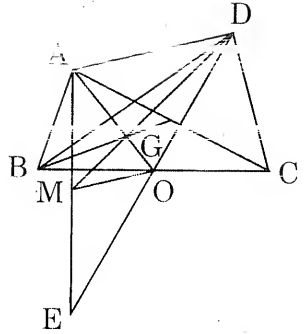
ình của  $\triangle EAD$ .

$$\triangle DBC: \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DE}$$

$$\frac{\triangle DAE: \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DM}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cho ta:  $3\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DM}$ .

Vậy D, G, M thẳng hàng.

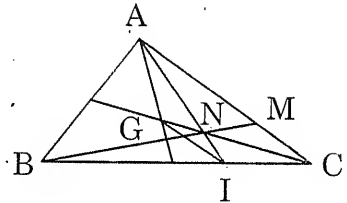


**Ví dụ 3.** Cho  $\triangle ABC$ . Xét hai điểm M, N định bởi  $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ . Chứng minh B, M, N thẳng hàng.

**Giải**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MC} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AM}}{3} = \frac{\overrightarrow{MC}}{1} = \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}}{4} = \frac{\overrightarrow{AC}}{4} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABM: \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \end{aligned} \quad (1)$$



Xét điểm I mà  $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ : I cố định. Gọi G là trọng tâm  $\triangle ABC$ .

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}) + \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} \\ &= 3\overrightarrow{NG} + \underbrace{\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB}} + 2(\underbrace{\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IC}}) = 3\overrightarrow{NG} + 3\overrightarrow{NI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}} \\ &= 3(\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{NI}) = 6\overrightarrow{NO}. \end{aligned}$$

Vậy  $N \equiv O$  (với O là trung điểm đoạn IG).

$$\begin{aligned} \triangle BIN: \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra:} \quad \frac{3}{2}\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) :  $\overline{BM} = \frac{3}{2}\overline{BN}$ . Vậy B, N, M thẳng hàng.

#### Dạng 4. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

##### Phương pháp

- Các dạng tập hợp điểm cơ bản :

Cho  $\triangle ABC$  cố định.

- 1)  $\overline{BM} = k\overline{BC}$  ( $k$  thay đổi) : Tập hợp điểm M là đường thẳng BC
- 2)  $\overline{AM} = k\overline{BC}$  ( $k$  thay đổi) : Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta)$  qua A và  $(\Delta) \parallel BC$ .
- 3)  $|\overline{BM}| = |\overline{CM}|$  : Tập hợp điểm M là đường trung trực của BC.
- 4)  $|\overline{AM}| = R$  ( $R$  không đổi) : Tập hợp điểm M là đường tròn  $(A, R)$ .

- Dùng các quy tắc vector đưa quan hệ vector đã cho về các dạng cơ bản trên.
- Đôi khi ta phải đưa vào bài toán các điểm cố định I, J thích hợp để dùng làm điểm cố định đóng vai trò A, B, C ở các dạng cơ bản.

**Ví dụ 1.** Cho  $\triangle ABC$ . Tìm tập hợp các điểm M thỏa :

$$\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC} = k\overline{BC} \quad (k \text{ là số thay đổi, } k \neq 0).$$

**Giải**

$$\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC} = k\overline{BC} \Leftrightarrow \underbrace{\overline{MA} + \overline{MB}} + \underbrace{\overline{MB} - \overline{MC}} = k\overline{BC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{MI} + \overline{CB} = k\overline{BC}$$

(I là trung điểm của AB)

$$\Leftrightarrow \overline{IM} = \left(\frac{1+k}{2}\right)\overline{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overline{IM} \text{ cùng phương } \overline{CB} \text{ (cố định).}$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng ( $\Delta$ ) qua I và ( $\Delta$ ) // BC (tức là đường trung bình ứng với cạnh BC).

**Ví dụ 2.** Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp các điểm M thoả :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MD}$$

với k là một số thay đổi khác 0 và khác 3.

**Giải**

Gọi G là trọng tâm của  $\Delta ABC$  thì G cố định. Theo tính chất trọng tâm :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MD} &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = k\overrightarrow{MD} \\ &\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DG}) = k\overrightarrow{MD} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{3}{3-k}\overrightarrow{DG} \quad (\text{do } k \neq 3).\end{aligned}$$

Tập hợp M là đường thẳng DG.

**Ví dụ 3.** Cho A, B cố định. Tìm tập hợp các điểm M thoả

$$|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = 5.$$

**Giải**

$$\begin{aligned}\text{Xét điểm I : } 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} &\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IA}}{-3} = \frac{\overrightarrow{IB}}{2} = \frac{\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}}{5} = \frac{\overrightarrow{AB}}{5} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{IB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \end{cases} \Rightarrow \text{I cố định.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } |2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = 5 &\Leftrightarrow |2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})| = 5 \\ &\Leftrightarrow |5\overrightarrow{MI} + \underbrace{2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}| = 5 \Leftrightarrow |\overrightarrow{IM}| = 1.\end{aligned}$$

Tập hợp các điểm M là đường tròn (I, 1) với I chia đoạn AB theo tỉ số  $-3/2$ .

**Ví dụ 4.** Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp các điểm M thoả

$$|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}|. \quad (*)$$



## Giải

Xét hai điểm I, J cho bởi :

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{JC} + 4\overrightarrow{JD} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{JC} = -4\overrightarrow{JD} \end{cases} \Rightarrow I, J \text{ cố định.}$$

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow |2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})| = |\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} + 4(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})| \\ &\Leftrightarrow |5\overrightarrow{MI} + \underbrace{2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}| = |\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JC} + 4\overrightarrow{JD}}_{\vec{0}}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{IM}| = |\overrightarrow{JM}| \end{aligned}$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn IJ.

## C. BÀI TẬP

**Bài 1.** Cho hình bình hành ABCD, tâm O. Gọi M là trung điểm cạnh BC. AM cắt BD tại H.

1) Tính vectơ tổng  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ .

2) Gọi K đối xứng của H qua O. Chứng minh

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{KD}.$$

Tìm quan hệ điểm K đối với tam giác ACD.

**Bài 2.** Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H là trung điểm bốn cạnh AB, BC, CD, DA ; M, N là trung điểm hai đường chéo BD, AC và O là trung điểm của EG. Chứng minh .

1)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

2)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{NM}$ .

3)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AO}$  và  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

4)  $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$ .

Kết luận về quan hệ ba đoạn thẳng EG, FH, MN ?

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$ . Xét hai điểm M, N định bởi  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA}$ . Gọi E, F là trung điểm của MN và BC.

Chứng minh :  $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

**Bài 4.** Cho hai đường tròn bằng nhau, tâm O, O' tiếp xúc ngoài

tại I. Gọi A và A' là hai điểm đối xứng của I qua O và O'.  
 $\overline{MON}$  và  $\overline{EO'F}$  là hai đường trung bình tuy y của hai  
đường tròn. Xác định vectơ tổng :  $\overline{IM} + \overline{IN} + \overline{IE} + \overline{IF}$ .

**Bài 5.** 1) Gọi G và G' là trọng tâm các tam giác ABC và A'B'C'.  
Chứng minh :  $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 3\overline{GG'}$ .

2) Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là  
trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng  
minh hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

**Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến AD. Xét hai điểm M, N cho bởi  
 $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$  và  $\overline{AN} = \frac{1}{4}\overline{AC}$ . Tìm điểm  $H \in AD$  sao cho M,  
H, N thẳng hàng.

**Bài 7.** Cho hình bình hành ABCD. Gọi M chia đoạn CB theo tỉ số  
 $1 - m$ . N chia đoạn DB theo tỉ số :  $-m$  ( $m \neq 0, m \neq -1$ ).  
Chứng minh A, M, N thẳng hàng.

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$ . Xét ba điểm M, N, P thoả :

$$\begin{cases} \overline{MB} = 3\overline{MC} \\ \overline{NA} = -3\overline{NC} \\ \overline{PA} + \overline{PB} = \vec{0}. \end{cases}$$

Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  cố định. Tìm tập hợp các điểm M thoả :

- 1)  $\overline{MA} + k\overline{MB} = k\overline{MC}$ .
- 2)  $\overline{MA} + (1 - k)\overline{MB} + (1 + k)\overline{MC} = \vec{0}$ .
- 3)  $\overline{MA} + (1 - k)\overline{MB} - k\overline{MC} = \vec{0}$ .
- 4)  $\overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{MC} = k\overline{BC}$ .
- 5)  $\overline{MA} - 2\overline{MB} + 4\overline{MC} = k\overline{BC}$ .

(k là số thay đổi).

**Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$ . Tìm tập hợp các điểm M thoả :

- 1)  $2|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = 3|\overline{MB} + \overline{MC}|$ .

- 2)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|.$
- 3)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|.$
- 4)  $|\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}|.$
- 5)  $|\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}|.$

### LỜI GIẢI

**Bài 1.** 1) Ta có O, M là trung điểm hai cạnh AC và BC nên H là trọng tâm của  $\Delta ABC$ , suy

ra :

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}. \quad (1)$$

2) AHCK là hình bình

hành nên ta có :

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{KC} \Rightarrow CK \parallel AM \Rightarrow HM$  là đường trung bình của  $\Delta BCK$ . Do đó :

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HK}. \quad (2)$$

Hai tam giác bằng nhau :

$$\Delta BCK = \Delta DAH \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BK = HD \Rightarrow HK = KD$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{KD}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra đpcm.

Mặt khác :

$$(1) \Leftrightarrow \vec{0} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KA} = \vec{0}.$$

Vậy K là trọng tâm tam giác ACD.

**Bài 2.** 1)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}}_{\vec{0}}$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

$$\begin{aligned} 2) 2\overrightarrow{NM} &= \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}}_{\vec{0}}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

$$3) \quad AB = 2AE$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AG} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}) = 4\overrightarrow{AO} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= 2\overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= 2\overrightarrow{OG} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= 2(\underbrace{\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}}_{\vec{0}}) = \vec{0} \end{aligned}$$

4) Áp dụng định lí đường trung bình :

$$\left. \begin{aligned} \triangle ADB: \overrightarrow{HE} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} \\ \triangle CDB: \overrightarrow{GF} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF} \Leftrightarrow HEFG \text{ là hhh.}$$

Mà  $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG} = \vec{0}$  nên  $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OH} = \vec{0}$ .

Chúng minh tương tự : EMGN là hhh  $\Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$ .

Vậy EG, FH, MN đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường.

$$\begin{aligned} \text{Bài 3. } \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

**Bài 4.** Vì IA và MN là hai đường kính của đường tròn (O) nên IMAN (và cả IEA'F) là hình chữ nhật (có 3 góc vuông).

Ta có :  $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA'} = \vec{0}$  (do hai đường tròn bằng nhau).

$$\begin{aligned} \text{Bài 5. } 1) \quad \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} - \overrightarrow{GC} \\ &= \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} - \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{\vec{0}} \\ &= \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} \\ &= 3\overrightarrow{GG'} + \underbrace{\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}}_{\vec{0}} = 3\overrightarrow{GG'}. \end{aligned}$$

$$2) \overline{MN} + \overline{PQ} + \overline{RS} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{CE} + \overline{EA}) = \vec{0}$$

Theo câu 1) gọi G, G' là trọng tâm của hai tam giác MPR và NQS thì :

$$\vec{0} = \overline{MN} + \overline{PQ} + \overline{RS} = 3\overline{GG'} \Leftrightarrow G' \equiv G.$$

Vậy hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

**Bài 6.** A, H, D thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overline{AH} = k\overline{AD}$ .

Yêu cầu bài toán chuyển thành tìm k để M, H, N thẳng hàng. Ta có :

$$\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}. \quad (1)$$

$$\overline{MH} = \overline{AH} - \overline{AM} = k\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{AB}. \quad (2)$$

$$M, H, N \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overline{MN} = p\overline{MH}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} = pk\overline{AD} - \frac{1}{2}p\overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} + 2(p-1)\overline{AB} = 2pk(\overline{AB} + \overline{AC})$$

$$\Leftrightarrow (2p-2-2pk)\overline{AB} = (2pk-1)\overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p-2-2pk=0 \\ 2pk-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\frac{3}{2} \\ k=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AD}, \overline{MN} = \frac{3}{2}\overline{MH} \text{ hay } M, H, N \text{ thẳng hàng.}$$

**Bài 7.** Ta có :  $\overline{MC} = (1-m)\overline{MB} \Leftrightarrow \overline{BC} - \overline{BM} = (m-1)\overline{BM}$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = m\overline{BM}. \quad (1)$$

$$\overline{ND} = -m\overline{NB} \Leftrightarrow \overline{BD} - \overline{BN} = m\overline{BN}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = (m+1)\overline{BN}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) : } \overline{MN} = \overline{BN} - \overline{BM} = \frac{1}{m+1}\overline{BD} - \frac{1}{m}\overline{BC}$$

$$= \frac{1}{m+1}(\overline{BC} + \overline{CD}) - \frac{1}{m}\overline{BC} = \frac{m\overline{CD} - \overline{BC}}{m(m+1)} \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{m} \overrightarrow{BC} = \frac{m\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}}{m}$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{MA} = \frac{m\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}}{m} \quad (4)$$

Từ (3), (4):  $\overrightarrow{MA} = (m+1)\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow A, M, N$  thẳng hàng.

$$\begin{aligned} \text{Bài 8. } \overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra  $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PN}$ . Vậy P, N, M thẳng hàng.

$$\text{Bài 9. 1) } \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = k\overrightarrow{BC}.$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta_1)$  qua A và  $(\Delta_1) \parallel BC$ .

$$\begin{aligned} 2) \quad &\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} + (1+k)\overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} + k\overrightarrow{BC} = \vec{0} \quad (G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \frac{k}{3}\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta_2)$  qua trọng tâm G và  $(\Delta_2) \parallel BC$ .

$$\begin{aligned} 3) \quad &\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - k(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} - 2k\overrightarrow{MJ} = \vec{0} \quad (I \text{ là trung điểm } AB, J \text{ là trung điểm } BC) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MJ}. \end{aligned}$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng IJ: đó là đường trung bình của tam giác ứng với đỉnh B.

$$\begin{aligned} 4) \quad &\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \\ &= 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \quad (G \text{ là trọng tâm tam giác}). \end{aligned}$$

Xét điểm I thoả :  $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$  (I cố định). Ta có :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} &= 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}} = 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MI}) \\ &= 6\overrightarrow{MO} \text{ (O là trung điểm của IG).} \end{aligned}$$

Vậy :  $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MO} = k\overrightarrow{BC}$ .

Tập hợp điểm M là đường thẳng ( $\Delta$ ) qua O và ( $\Delta$ ) // BC.

5) Xét điểm I :  $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IC}$  thì I cố định.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MA} - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \\ &= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - \underbrace{2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}. \end{aligned}$$

Xét điểm J :  $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JI} = \vec{0}$  thì J cố định. Ta có :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JI}) \\ &= 3\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JI}}_{\vec{0}}. \end{aligned}$$

Do đó :  $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MJ} = k\overrightarrow{BC}$ . Tập hợp các điểm M là đường thẳng ( $\Delta$ ) qua J và ( $\Delta$ ) // BC.

**Bài 10.1)**  $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 2|3\overrightarrow{MG}| = 3|2\overrightarrow{MI}|$   
 $\Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{MI}|.$

(G là trọng tâm tam giác, I là trung điểm BC).

Tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn GI.

$$2) |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MI}| \text{ (I là trung điểm của BC)}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = 2|\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{CJ}| \text{ (J là trung điểm của AB)}$$

Tập hợp điểm M là đường tròn (I, CJ).

$$3) |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})|$$

$$\Leftrightarrow |3\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG}|. \quad (*)$$

Xét 2 điểm I, J cho bởi :  $3\overrightarrow{IG} = 2\overrightarrow{IC}$  và  $2\overrightarrow{JA} = 3\overrightarrow{JG}$ .

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow |3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| = |2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}) - 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JG})| \\ &\Leftrightarrow |\overrightarrow{MI} + \underbrace{3\overrightarrow{IG} - 2\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}| = |-\overrightarrow{MJ} + \underbrace{2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JG}}_{\vec{0}}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{MJ}|. \end{aligned}$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn IJ.

4) Xét I và J cho bởi :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IB} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I, J \text{ cố định.}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB}| &= |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})| &= |\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})| \\ \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IB}| &= |3\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{MJ}|. \end{aligned}$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn IJ.

$$5) \text{ Xét : } \left. \begin{aligned} \overrightarrow{IC} &= 2\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{JA} &= 2\overrightarrow{JC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I, J \text{ cố định.}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB}| &= |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}| \\ \Leftrightarrow |(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})| &= |\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} - 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})| \\ \Leftrightarrow |-\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{IB}| &= |-\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{MJ}|. \end{aligned}$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn IJ.

## D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý.

1) Chứng minh :

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$

2) M, N là trung điểm của AB và CD. Gọi O là trung điểm của MN và I là điểm tùy ý. Chứng minh :

a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$



$$b) \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{IO}.$$

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$ . Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành ABMN, BCEF, CAHK tùy ý. Chứng minh :

$$\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{NH} + \overrightarrow{KE} = \vec{0}.$$

**Bài 3.** Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M là điểm tùy ý. Chứng minh :

$$1) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

$$2) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$$

**Bài 4.** Gọi M, N, P là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của  $\triangle ABC$ . Chứng minh hai tam giác ABC và MNP cùng trọng tâm.

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$ . Xét hai điểm I, J cho bởi  $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$  và  $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ .

1) Tính  $\overrightarrow{IJ}$  phụ theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

2) Gọi G là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Chứng minh I, G, J thẳng hàng.

**Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  có M là trung điểm cạnh BC và O là trung điểm của AM. Xét hai điểm I, J định bởi :  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  và

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}. \text{ Chứng minh I, O, J thẳng hàng.}$$

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  cố định. Tìm tập hợp điểm M thỏa :

$$1) \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

$$2) 2\overrightarrow{MA} + (3-k)\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

$$3) 2\overrightarrow{MA} - (1+k)\overrightarrow{MB} - 3k\overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ (k thay đổi).}$$

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$ . Tìm tập hợp điểm M thỏa :

$$1) |\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}|.$$

$$2) |2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|.$$

$$3) |4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|.$$

**Bài 9.** Cho tứ giác ABCD cố định.

1) a) Xác định điểm I thỏa :  $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

b) Tìm tập hợp các điểm M :  $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 2$ .

2) Tìm tập hợp các điểm N, P, Q, R thỏa :

a)  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{ND}$ .

b)  $\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$ .

c)  $|\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + 2\overrightarrow{QD}|$ .

d)  $|\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB}| = |\overrightarrow{RC} - 5\overrightarrow{RD}|$ .

**Bài 10.** Chứng minh trong mọi hình thang, giao điểm của hai cạnh bên và trung điểm các cạnh đáy thì thẳng hàng.

### HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.** Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc trung tuyến.

**Bài 2.** Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành.

**Bài 3.** Sử dụng quy tắc trung điểm và quy tắc trung tuyến.

**Bài 4.** Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc trọng tâm.

**Bài 5.** 1)  $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$ .

2) Tính  $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB})$ .

Yêu cầu bài toán tương đương với  $5\overrightarrow{IJ} = 6\overrightarrow{IG}$ .

**Bài 6.** Yêu cầu bài toán tương đương với  $15\overrightarrow{IJ} = 24\overrightarrow{IO}$ .

**Bài 7.** 1) Tập hợp điểm M là đường trung tuyến AD của  $\triangle ABC$ .

2) Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta)$  qua I và  $(\Delta) \parallel BC$  với I, điểm chia đoạn AB theo tỉ số  $-3/2$ .

3) Xét hai điểm cố định I, J cho bởi :

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \end{cases}$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng IJ.

**Bài 8.** 1) Gọi I, J là trung điểm của CB và CA ; E, F là trung điểm của BI và CJ. Tập hợp điểm M là đường trung trực ( $\Delta$ ) của EF.

2) Gọi I, J cho bởi :

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ 4\overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JC} = \vec{0}. \end{cases}$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn IJ.

3) Gọi G là trọng tâm  $\Delta ABC$ , I là trung điểm của AG. Tập hợp điểm M là đường tròn  $\left(I, \frac{AG}{2}\right)$ .

**Bài 9.** 1) a)  $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I$  là trung điểm của đường trung tuyến AJ và  $\Delta ABC$ .

b) Tập hợp điểm M là đường tròn  $\left(I, \frac{1}{2}\right)$ .

2) a) Tập hợp điểm N là đường thẳng GD, với G là trọng tâm  $\Delta ABC$ .

b) Tập hợp điểm P là đường thẳng EF với E là trung điểm của AB và F là trung điểm của CD.

c) Tập hợp điểm Q là đường trung trực đoạn HK với H, K chia các cạnh AB và CD theo tỉ số  $-2$ .

d) Tập hợp điểm R là đường trung trực đoạn UV với U chia AB theo tỉ số  $-3$  và V chia CD theo tỉ số  $5$ .

**Bài 10.** Hướng dẫn : Gọi O là giao điểm của hai cạnh bên. M, N là trung điểm hai cạnh đáy AB và CD. Đặt  $k = \frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} \neq 1$

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} \overrightarrow{OA} = \frac{k}{1-k} \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OB} = \frac{k}{1-k} \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{OM} = \frac{k}{2(1-k)} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \end{cases} \Rightarrow (1-k)\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{MN}.$$

## § 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Định nghĩa – Tính chất

##### a. Định nghĩa tích vô hướng của hai vector

Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Tích vô hướng của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , là số thực, bằng tích các độ dài của các vector nhân với cosin của góc hợp bởi hai vector đó.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

##### b. Bình phương vô hướng của một vector

Bình phương vô hướng của một vector bằng bình phương độ dài của vector đó.

$$(\overline{AB})^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = |\overline{AB}|^2 = AB^2.$$

##### c. Điều kiện để hai vector vuông góc

Cho  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và  $\vec{b} \neq \vec{0}$ :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

##### d. Tính chất của tích vô hướng

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (tính giao hoán).
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$  (tính phân phối với phép cộng).
- $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$  (tính kết hợp).

#### 2. Công thức hình chiếu

##### a. Trục – Độ dài đại số của vector trên một trục

- Trục là một đường thẳng đã chọn điểm gốc O và vector đơn vị  $\vec{e}$ . Kí hiệu  $(O, \vec{e})$ .
- Cho hai điểm A, B trên trục  $(O, \vec{e})$ . Ta luôn tìm được số m sao cho  $\overline{AB} = m \cdot \vec{e}$ . Ta gọi m là độ dài đại số của vector  $\overline{AB}$ . Kí hiệu:  $\overline{AB} = m$ .
- Cho ba điểm A, B, C trên trục  $(O, \vec{e})$ .
  - + Nếu  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  cùng hướng:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC$$

+ Nếu  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  ngược hướng :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -AB \cdot AC$$

### **b. Công thức hình chiếu**

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Gọi  $\vec{b}'$  là vectơ hình chiếu của  $\vec{b}$  lên giá của  $\vec{a}$ , ta có :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}'$ .

## **B. CÁC DẠNG TOÁN**

### **Dạng 1. TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG**

#### **Phương pháp**

Tùy theo giả thiết, ta có thể dùng các phương pháp :

- 1) Dùng định nghĩa.
- 2) Dùng định lý hình chiếu.
- 3) Phân tích tích vô hướng thành nhiều tích dưới dạng tổng, hiệu (nhờ các quy tắc vectơ) mà mỗi tích vô hướng thành phần đều tính được.

#### **Đặc biệt.**

a)  $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

b) A, B, C thẳng hàng :

A ở ngoài đoạn BC :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC$  ;

A ở trong đoạn BC :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \cdot AC$ .

**Ví dụ 1.** Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh bằng 1. Tính :

a)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  ;  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ .

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ .

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$  ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ .

d)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})$ .

e)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD})$ .

### Giải

- a)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  ;  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -OA^2 = -1/2$ .  
 b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$  ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$  ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = AC^2 = 1/2$ .  
 c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB^2 = -1$  ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB^2 = 1$ .  
 d)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -AC^2 = -2$ .  
 e)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}) = 2\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$   
 $= 2AC^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 4$ .

**Ví dụ 2.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ . Về phía ngoài tam giác kẻ ba hình vuông  $ABMN$ ,  $BCEF$ ,  $CAHK$ . Tính các tích vô hướng :

- a)  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC}$  ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ .      b)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$  ;  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BF}$ .  
 c)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AK}$  ;  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AH}$ .      d)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CH}$  ;  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

### Giải

a)  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} = AN \cdot AC \cos(90^\circ + 60^\circ)$   
 $= -a^2 \sin 60^\circ = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \cdot AH \cos(90^\circ + 60^\circ)$   
 $= -a^2 \sin 60^\circ = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .

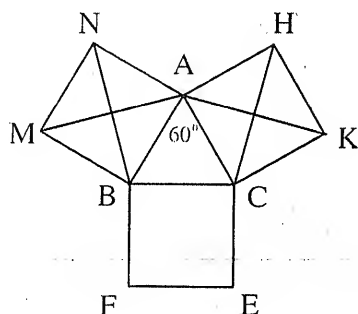
b)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = AM \cdot AC \cos(45^\circ + 60^\circ)$   
 $= a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{3}) = \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) a^2$ .

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BF} = AM \cdot BF \cos(45^\circ + 30^\circ) = a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$   
 $= \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) a^2$ .

c)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AK} = AM \cdot AK \cos(90^\circ + 60^\circ) = -AM^2 \sin 60^\circ = -a^2 \sqrt{3}$ .

$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AH} = AN \cdot AH \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$ .

d)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CH} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN})(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})$



$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ (câu a))} \\
&= -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -a^2. \\
\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - AB^2 \\
&= \underbrace{(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC}} - AB^2 \\
&= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} - AB^2 = \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) a^2 - a^2 \text{ (câu b))} \\
&= -\left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) a^2.
\end{aligned}$$

## Dạng 2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC NHỜ TÍCH VÔ HƯỚNG

### Phương pháp

- Sử dụng các phương pháp ở Dạng 1 để tính tích vô hướng rồi suy ra kết quả.
- Đôi khi ta sử dụng phương pháp bình phương để tìm đẳng thức có chứa đại lượng là bình phương một độ dài.

**Ví dụ 1.** Cho  $\triangle ABC$  có các trung tuyến  $AD$ ,  $BE$  và  $CF$ . Chứng minh :  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

### Giải

Sử dụng các quy tắc ba điểm và trung tuyến, ta có :

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(b^2 - c^2)$$

$$\text{Tương tự : } \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(c^2 - a^2) ;$$

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

$$\text{Suy ra : } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

**Ví dụ 2.** Cho  $\Delta ABC$  có :

$$\overline{BC} = a = 2\sqrt{3}, \overline{CA} = b = 2\sqrt{2}, \overline{AB} = c = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

1. a) Chứng minh  $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}$ . (1)

b) Suy ra góc A.

2. Tính B và C.

**Giải**

1. a)  $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}$ . (1)

b) Từ (1) ta có :  $\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2}$

$$= \frac{1}{2}(8 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 12) = 2(1 - \sqrt{3})$$

Mặt khác :

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = AC \cdot AB \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{AC \cdot AB}$$

$$= \frac{2(1 - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = -\frac{1}{2}$$

Vậy  $\hat{A} = 120^\circ$ .

2. Tương tự :

$$\cos B = \frac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2BC \cdot BA} = \frac{12 + 6 + 2 - 2\sqrt{12} - 8}{2 \cdot 2\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra :  $\hat{B} = 45^\circ$  và  $\hat{C} = 15^\circ$ .

**Ví dụ 3.** Cho hình bình hành ABCD. Gọi M là điểm tùy ý.

Chứng minh :  $\overline{MA} \cdot \overline{MC} - \overline{MB} \cdot \overline{MD} = \overline{BA} \cdot \overline{BC}$ .

**Giải**

Gọi O là tâm hình bình hành, ta có :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MC} = (\overline{OA} - \overline{OM})(\overline{OC} - \overline{OM}).$$

$$\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{OA} \cdot \overline{OC} - (\overline{OA} + \overline{OC})\overline{OM} + OM^2 = OM^2 - OA^2. \quad (1)$$

Tương tự :  $\overline{MB} \cdot \overline{MD} = OM^2 - OB^2. \quad (2)$

Từ (1) và (2) :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} &= OB^2 - OA^2 = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \text{ (đpcm).}\end{aligned}$$

### Dạng 3. CHỨNG MINH HAI VECTOR VUÔNG GÓC

#### Phương pháp

Sử dụng công thức :  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

**Ví dụ 1.** Cho hình vuông ABCD cạnh a. Từ điểm M tùy ý trên đường chéo BD, kẻ  $ME \perp AB$  và  $MF \perp AD$ . Chứng minh  $DE \perp CF$ .

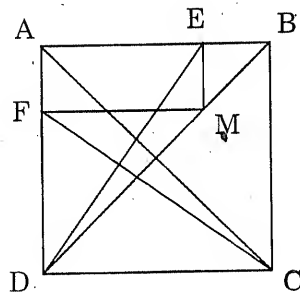
#### Giải

Vì AEMF là hình chữ nhật. Đặt  $EB = m$  thì

$$\begin{cases} AE = a - m \\ AF = EM = EB = m. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= -AF \cdot AD - AB \cdot AE + AD^2 \\ &= -ma - a(a - m) + a^2 = 0.\end{aligned}$$

Vậy  $CF \perp DE$ .



**Ví dụ 2.** Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB và hai cạnh đáy AD và BC thỏa :  $AB^2 = AD \cdot BC$ . Chứng minh hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau.

#### Giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - AB^2 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = -AB^2 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= -AB^2 + BC \cdot AD = 0.\end{aligned}$$

Vậy :  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ .

**Ví dụ 3.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  và trung tuyến  $AD$ . Tìm điểm  $E \in AC$  sao cho  $BE \perp AD$ .

**Giải**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - AB^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(AE \cdot AC - AB^2).\end{aligned}$$

$$BE \perp AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow AC \cdot AE = AB^2 \Rightarrow AE = \frac{9}{4}.$$

#### Dạng 4. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

##### Phương pháp

Các dạng cơ bản : Cho  $\triangle ABC$  cố định

- 1)  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$  : Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC.
- 2)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  : Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta) \perp BC$  tại điểm A.

**Ví dụ 1.** Cho  $\triangle ABC$ . Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

- 1)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM^2$ .
- 2)  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 0$ .
- 3)  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = AC^2$ .

**Giải**

$$\begin{aligned}1) \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM^2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.\end{aligned}$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AB.

$$\begin{aligned}2) \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) &= 0 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MI})(3\overrightarrow{MG}) = 0\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MG} = 0$  (I là trung điểm BC, G là trọng tâm  $\triangle ABC$ ).

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IG.

3) Gọi I, J, O lần lượt là trung điểm AB, BC, IJ. Ta có :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = AC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = \frac{AC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OM}) = \frac{AC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2 = \frac{AC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow OM^2 = \frac{AC^2}{4} + OJ^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{IJ^2}{4} = \frac{5}{16} AC^2.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn  $\left( O, \frac{\sqrt{5}}{4} AC \right)$ .

**Ví dụ 2.** Cho  $\triangle ABC$ . Tìm tập hợp điểm M thỏa :

1)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

2)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ .

3)  $MA^2 = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ .

### ***Giải***

1)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ .

Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta) \perp AB$  và đi qua C.

2)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ .

Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta) \perp BC$  và đi qua A.

3)  $MA^2 = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$  (O là trung điểm BC)

$$= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM})$$

$$= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2 = OM^2 - OC^2$$

$$\text{Vậy : } MA^2 = OM^2 - OC^2 \Leftrightarrow MO^2 - MA^2 = OC^2 = \frac{BC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA}) = \frac{BC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{BC^2}{8}$$

(I là trung điểm AO).

Gọi H là hình chiếu của M lên OA.

$$MA^2 = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{BC^2}{8} \Rightarrow H \text{ cố định.}$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta) \perp AO$  tại H.

**Ví dụ 3.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh a. Tìm tập hợp điểm M thỏa :

$$1) MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4a^2. \quad (1)$$

$$2) 2MB^2 - MC^2 = a^2. \quad (2)$$

$$3) 3MA^2 - 2MB^2 = MC^2. \quad (3)$$

### Giải

$$1) \text{ Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC } \Rightarrow GA^2 = \frac{a^2}{3}.$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2 = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow 3GA^2 + 3GM^2 - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})\overrightarrow{GM} = 4a^2. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow GM^2 = \frac{1}{3}(4a^2 - 3GA^2) = a^2$$

Tập hợp điểm M là đường tròn (G, a).

$$2) \text{ Xét điểm I : } 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I \text{ cố định.}$$

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow MI^2 + 2IB^2 - IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}) = a^2 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = a^2 + IC^2 - 2IB^2 = 3a^2. \end{aligned}$$

Tập hợp điểm M là đường tròn  $(I, a\sqrt{3})$  với I chia đoạn BC theo tỉ số 1/2.

$$3) \text{ Xét điểm I : } 3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{IB}} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &\Leftrightarrow MI^2 + 3IA^2 - 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}) = MI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}(IC^2 + 2IB^2 - 3IA^2) = \frac{13}{2}a^2. \end{aligned}$$

Qua M kẻ  $MH \perp IC$  thì :

$$\overline{IM} \cdot \overline{IC} = \overline{IH} \cdot \overline{IC} = \frac{13}{2} a^2 \Rightarrow \overline{IH} = \frac{13a\sqrt{7}}{14}$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta) \perp IC$  tại H.

$$\begin{cases} IA = 2a \\ IB = 3a \\ IC = a\sqrt{7}. \end{cases}$$

### C. BÀI TẬP

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp trong đường tròn  $(O, R)$ .

1) Tính các tích vô hướng :

a)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}, \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ .

b)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ .

c)  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC} \cdot \overline{OA}$ .

2) Cho M tùy ý trên đường tròn

a) Tính  $\overline{MB} \cdot \overline{MC} - \overline{OA} \cdot \overline{OM}$ .

b) Chứng minh  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ .

3) Điểm  $M'$  thuộc đường nào, nếu ta có :

$$(\overline{M'A} + \overline{M'B} + \overline{M'C})(\overline{M'B} + \overline{M'C}) = 0.$$

**Bài 2.** Cho hình chữ nhật ABCD tâm O. Cho M là một điểm tùy ý. Chứng minh :

1)  $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$ .

2)  $MA^2 - MD^2 = MB^2 - MC^2$ .

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  có trục tâm là H và M là trung điểm cạnh  $BC = a$ . Tính  $\overline{MH} \cdot \overline{MA}$ .

**Bài 4.** Cho hình bình hành ABCD. Qua đỉnh C, kẻ  $CE \perp AB$  và  $CF \perp BD$ . Chứng minh :  $\overline{BD} \cdot \overline{BF} - \overline{BA} \cdot \overline{BE} = BC^2$ .

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A, có đường cao AH. Kẻ  $HD \perp AC$ . Gọi M là trung điểm của HD. Chứng minh  $AM \perp BD$ .

**Bài 6.** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính  $AB = 2R$ . Gọi M, N là hai điểm trên nửa đường tròn đó, sao cho AM cắt BN tại I

1) Chứng minh  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

2) Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$ .

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Về phía ngoài tam giác, kẻ hai hình vuông ABMN và ACHK. Chứng minh :

1) a)  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK}$ .

b)  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK}$ .

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AK} = 0$ .

2) a)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CK} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

b)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ .

c)  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ .

3) Gọi O là trung điểm cạnh BC. Chứng minh  $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{NK}$ .

**Bài 8.** Cho đường tròn (O, R). Về hai đường kính vuông góc AOB và COD. Gọi M là trung điểm  $\widehat{BC}$ . AM cắt OC tại N. Tính các tích vô hướng :

1) a)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO}$ .

b)  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

2) a)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

b)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OM}$ .

3) a)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM}$ .

b)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AN}$ .

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$ , đặt  $\widehat{CAB} = \alpha$ . Vẽ hai hình vuông ABED, ACMN ở cùng miền chứa tam giác ABC. Chứng minh :  $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{BN}$ .

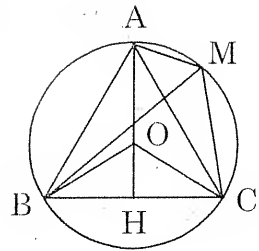
**Bài 10.** Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB,  $AD = 2BC$ . Kẻ  $AH \perp BD$ , gọi M là trung điểm của DH. Chứng minh  $\widehat{AMC} = 90^\circ$ .

### LỜI GIẢI

**Bài 1.** Ta có cạnh tam giác đều bằng  $R\sqrt{3}$ .

$$1) a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos 60^\circ \\ = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{3}{2} R^2.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cos 120^\circ \\ = -\frac{1}{2} AB^2 = -\frac{3}{2} R^2.$$



$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) \\ = 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \quad (\text{do } AB \perp OC).$$

$$c) \text{Ta có: } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cos 120^\circ = -\frac{R^2}{2}. \text{ Suy ra:}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -\frac{3R^2}{2}.$$

$$2) a) \text{Ta có: } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) \\ = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2 \\ = -\frac{R^2}{2} + R^2 - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OM} \\ = \frac{R^2}{2} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} \quad (\text{do } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0})$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{R^2}{2}.$$

$$b) \text{Ta có: } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{R^2}{2};$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{R^2}{2};$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{R^2}{2}.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}_{\vec{0}} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{3R^2}{2}$$

$$\text{Từ } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO} \text{ suy ra:}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9R^2$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 9R^2 - 2\left(\frac{3R^2}{2}\right) = 6R^2.$$

3) AO cắt BC tại H thì H là trung điểm cạnh BC

$$(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'C})(\overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'C}) = 0 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{M'O} \cdot 2\overrightarrow{M'H} = 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{M'O} \cdot \overrightarrow{M'H} = 0.$$

Suy ra  $M'$  thuộc đường tròn đường kính OH.

**Bài 2.** 1)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM})$   

$$= \underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}_{\vec{0}} - \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})}_{\vec{0}} \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2$$
  

$$= -OA \cdot OC + OM^2 = OM^2 - OA^2. \quad (1)$$

Tương tự:  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = OM^2 - OB^2. \quad (2)$

Từ (1) và (2):  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}. \quad (3)$

2) Vì O là trung điểm của AC và BD nên

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \text{ (cùng bằng } 2\overrightarrow{MO} \text{)}. \quad (4)$$

Bình phương (4) ta được:

$$MA^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = MB^2 + MD^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

Suy ra:  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$  suy ra đpcm.

**Bài 3.**  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AC})$$

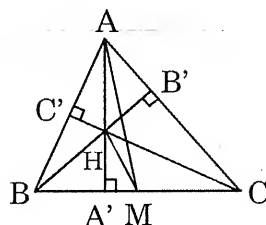
$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC'} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB'} \cdot \overrightarrow{CA})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA'} - \overrightarrow{CA'}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}BC^2 = \frac{a^2}{4}.$$



**Bài 4.** Theo định lí hình chiếu:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD};$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

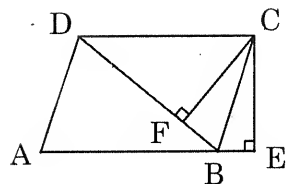


Do đó :

$$\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$\text{Suy ra : } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} \text{ (đpcm).}$$

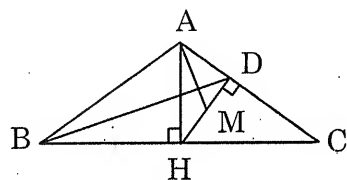


**Bài 5.** 
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{HD} - \overrightarrow{HB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD}}_0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC}) \\ &= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC}) \end{aligned}$$

Mà  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HD} = HD^2$  (do  $AD \perp HD$ )

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$  (do  $HD \perp AC$ ).

Do đó : 
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \frac{1}{2}(-HD^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}) \\ &= -\frac{1}{2}(HD^2 + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}) \\ &= -\frac{1}{2}(HD^2 - HD^2) = 0. \end{aligned}$$



Vậy  $AM \perp BD$ .

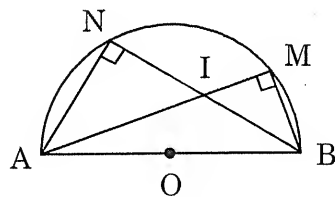
**Bài 6.** 1) Vì  $BM \perp AM$  nên theo định lý hình chiếu ta có :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI}. \quad (1)$$

2) Tương tự :  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}. \quad (2)$

Cộng (1) và (2) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = AB^2 = 4R^2. \end{aligned}$$



**Bài 7.** 1) a) Do  $AN \perp AB$  và  $AK \perp AC$  nên  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK} = 0$

b)  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} = cb \cos(90^\circ + A) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK}.$

$$c) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos A;$$

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AK} = bc \cos(180^\circ - A) = -bc \cos A.$$

$$\text{Do đó : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AK} = 0.$$

$$\begin{aligned} 2) a) \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CK} &= (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AK} - \underbrace{\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK}}_{\text{câu 1 b)}} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$= \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ (câu 1c)).}$$

$$\text{Do đó : } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CK} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

$$\begin{aligned} b) \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 \\ &= (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 \\ &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} - c^2. \end{aligned}$$

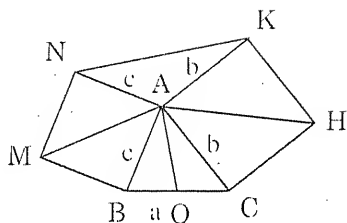
$$\text{Do đó : } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2.$$

$$\begin{aligned} c) \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN}) \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 \\ &= (\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + a^2 \\ &= \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} + a^2 \\ &= -2\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} + a^2 \text{ (câu 1b)).} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2.$$

$$\begin{aligned} 3) \text{Ta có : } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{NK} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AN}) = 0 \text{ (do câu 1b)).} \end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{NK}$ .



**Bài 8.** 1) Kẻ  $MH \perp OB$ :  $\triangle OMH$  vuông cân tại H. Kẻ  $OE \perp AC$ ,

ta có :  $OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ . Theo định lí hình chiếu :

$$a) \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = AH \cdot AO = \left(R + \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)R = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)R^2.$$



$$= AB.AC(\underbrace{\cos(180^\circ - \alpha) + \cos \alpha}_0) = 0$$

Suy ra :  $\overline{CD} \perp \overline{BN}$ .

**Bài 10.** Gọi E là điểm đối xứng của A qua M thì ADEH là hình bình hành, suy ra  $\overline{HE} = \overline{AD}$ .

$$\begin{aligned}\overline{AM} \cdot \overline{CM} &= \frac{1}{2}(\overline{AH} + \overline{AD})(\overline{BM} - \overline{BC}) \\ &= \frac{1}{4}(\overline{AH} + \overline{AD})(2\overline{BM} - \overline{AD}) \\ &= \frac{1}{4}(2\overline{AH} \cdot \overline{BM} - \overline{AH} \cdot \overline{AD} + 2\overline{AD} \cdot \overline{BM} - \overline{AD}^2) \\ \overline{AM} \cdot \overline{CM} &= \frac{1}{4}(-\overline{AD}^2 - \overline{AH} \cdot \overline{AD} + 2\overline{AD}(\overline{AM} - \overline{AB})) \\ &= \frac{1}{4}(-\overline{AD}^2 - \overline{AH} \cdot \overline{AD} + 2\overline{AD} \cdot \overline{AM} - 2\overline{AD} \cdot \overline{AB}) \\ &= \frac{1}{4}(-\overline{AD}^2 - \underbrace{\overline{AH} \cdot \overline{AD} + \overline{AD} \cdot \overline{AE}}_{\text{(do } \overline{AE} = 2\overline{AM})}) \\ &= \frac{1}{4}[-\overline{AD}^2 + \overline{AD}(\overline{AE} - \overline{AH})] \\ &= \frac{1}{4}(-\overline{AD}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{HE}) \\ &= \frac{1}{4}(-\overline{AD}^2 + \overline{AD}^2) = 0 \text{ (Do } \overline{HE} = \overline{AD}).\end{aligned}$$

Vậy  $\overline{AM} \perp \overline{CM}$ .

#### D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho đường tròn (O, R), đường kính AOB. Gọi ( $\Delta$ ) là tiếp tuyến tại B. Trên ( $\Delta$ ) lấy điểm M. MO cắt đường tròn tại E, F ; MA cắt đường tròn tại H và AE cắt ( $\Delta$ ) tại K (MK cùng phía đối với B).

1) Cho  $BM = 2R$

a) Tính các tích vô hướng :  $\overline{AH} \cdot \overline{AM}$  ;  $\overline{AE} \cdot \overline{AK}$  ;  $\overline{AO} \cdot \overline{AB}$  và

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}.$$

b) Chứng minh  $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM}$ .

2) Cho M tùy ý trên  $(\Delta)$ . Chứng minh :

a)  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}$ .

b)  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MO}$ .

**Bài 2.** Cho hình thang vuông ABCD, đường cao  $AB = a\sqrt{2}$ , cạnh đáy  $AD = a$ ,  $BC = 2a$ . Gọi I là trung điểm đường cao AB.

1) Tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ ;  $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}$ ;  $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}$ ;  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ .

2) Chứng minh  $\widehat{CID} = 90^\circ$ .

**Bài 3.** Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp trong đường tròn (O, R). Xét điểm H cho bởi :  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ .

1) Tính  $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$ . Suy ra H là trực tâm  $\Delta ABC$ .

2) Cho  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi M là trung điểm  $\widehat{BC}$ . Chứng minh  $OH \perp AM$ .

**Bài 4.** Cho hình vuông ABCD tâm O. Từ điểm M chia đoạn AD theo tỉ số  $-\frac{1}{2}$ , kẻ  $MN \parallel DB$ . Chứng minh :  $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{DN}$ .

**Bài 5.** Cho  $\Delta ABC$ . Tìm tập hợp các điểm M thoả :

$$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|.$$

**Bài 6.** Cho  $\Delta ABC$  vuông, cạnh huyền  $BC = 2a$ . Tìm tập hợp các điểm M thoả :

a)  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$ .

b)  $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2$ .

c)  $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 4a^2$ .

**Bài 7.** Cho hình vuông ABCD, tâm O, cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M thoả :

a)  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = a^2$ .

b)  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 5a^2$ .

$$c) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MD}.$$

**Bài 8.** Cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý. Chứng minh :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$$

Suy ra trong tam giác ba đường cao đồng quy.

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh bằng 3, lấy trên BC, CA, AB các điểm M, N, P mà  $BM = 1$ ,  $CN = 2$  và  $AP = x$ . Tính x để  $AM \perp PN$ .

**Bài 10.** Cho hình thang vuông ABCD có đường cao  $AB = 3a$ ,  $AD = a$ ,  $BC = 2a$ . Gọi I là trung điểm của DC.

1) Chứng minh  $\widehat{AIB} = 90^\circ$ .

2) Tập hợp điểm M :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = MB^2$ .

### HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.** 1) a)  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AK} = 4R^2$ ,  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = 2R^2$ ,  
 $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 4R^2$ .

2) a) Đưa điểm O vào, chú ý AEHF là hình chữ nhật hoặc dùng phép hình chiếu  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MH} = MB^2$ .

b) Định lí hình chiếu.

**Bài 2.** 1)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8a^2$ ,  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 2a^2$ ,  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 2a^2$ ,  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = a^2$ ,  
 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 8a^2$ ,  
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -6a^2$ .

2)  $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI}) = 0$  (đpcm).

**Bài 3.** 1)  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$ .

Tương tự :  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$  (đpcm).

2) Để ý OBMC là hình thoi.

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + R^2 = 0$  (đpcm).

**Bài 4.**  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{DN} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO})(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD}) = 0$  (đpcm).

**Bài 5.** Gọi I là điểm đối xứng của C qua B  $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

$\overrightarrow{MA}(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$ . Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AI.

**Bài 6.** a)  $M \in (\Delta_1): (\Delta_1) \perp BC$  tại A.

b)  $M \in (\Delta_2): (\Delta_2)$  vuông góc đường trung tuyến AD tại A.

c) Thay  $4a^2 = BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$  và chú ý rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  ta được kết quả  $M \in (\Delta_2)$ : câu b).

**Bài 7.** a) M thuộc đường tròn (O, a).

b) Gọi I, J là trung điểm AB và CD, suy ra M thuộc đường tròn  $\left(O, \frac{a\sqrt{b}}{2}\right)$ .

c) Hướng dẫn: Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MD}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MD}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MD}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{DC}) = 0 \text{ (E là trung điểm AD).}$$

$$\Leftrightarrow (3\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OM} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \Leftrightarrow M \in AC.$$

Chú ý rằng:  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = OE^2$ ;

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OJ} = OJ^2.$$

Câu c) có thể đưa trọng tâm G của  $\Delta ABC$  ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$3\overrightarrow{MD}^2 = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$$

$$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MG})(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MG}) = \frac{48}{36}a^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{MF} = \frac{2a^2}{9} \text{ (F là trung điểm DG)} \Leftrightarrow \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{KF} = \frac{2a^2}{9}.$$

Suy ra:  $\overrightarrow{KF} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$  (với K là hình chiếu của M trên BD).

Vậy  $K \equiv O$  nên  $M \in AC$ .

**Bài 8.** Hướng dẫn :  $AB \cdot DC = (DB - DA) \cdot DC = DB \cdot DC - DA \cdot DC$ .

**Bài 9.** Đáp số :  $x = \frac{4}{5}$ .

**Bài 10.2)** Gọi  $O$  là trung điểm của  $AC$  thì  $OA = OB = OC = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ .

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = OB^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0.$$

Tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng  $(\Delta)$  vuông góc với  $OB$  tại  $O$ .

## ÔN TẬP CHƯƠNG I

### A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Xét hai điểm  $E$  và  $F$  thỏa  $\frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} = -\frac{2}{3}$

và  $\frac{\overrightarrow{FB}}{\overrightarrow{FC}} = \frac{2}{5}$ .

1) Tính  $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

2) Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Tính  $\overrightarrow{AG}$  phụ theo  $\overrightarrow{AE}$  và  $\overrightarrow{AF}$ .

**Bài 2.** Cho tứ giác  $ABCD$  tùy ý.

1) Xác định điểm  $E$  thỏa  $\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ . (1)

2) Định số  $k$  và xác định điểm  $F$  thỏa

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MF} \quad (\forall M). \quad (2)$$

3) Tìm tập hợp  $\mathcal{M} = \{M / |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MD}|\}$ .

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $H, G$  là trực tâm và trọng tâm tam giác,  $D$  là điểm đối tâm của  $A$ .

1) Chứng minh :



$$a) \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}.$$

$$b) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$$

2) Chứng minh O, H, G thẳng hàng.

3) Tìm tập hợp điểm M thỏa :

$$2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{HO}| = 9\left|\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AH}\right|.$$

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp trong đường tròn  $(O, R)$ . M là điểm tùy ý trong  $\triangle ABC$ . Kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với ba cạnh BC, CA, AB.

$$1) \text{ Chứng minh } \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

2) Cho M di động thỏa  $|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = R$ . Tìm tập hợp trọng tâm của  $\triangle DEF$ .

**Bài 5.** Cho tứ giác ABCD có E, F là trung điểm của AB và CD. Gọi M, N là hai điểm cho bởi :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{NB} + k\overrightarrow{ND} = \vec{0} \end{cases} \quad (k \neq -1)$$

O là trung điểm của MN.

1) Chứng minh :  $\overrightarrow{OE} + k\overrightarrow{OF} = \vec{0}$ . Tìm tập hợp điểm O khi k thay đổi.

2) Xét hai điểm P, Q sao cho :

$$\begin{cases} \overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PD} = \vec{0} \\ \overrightarrow{QB} + k\overrightarrow{QC} = \vec{0} \end{cases}$$

Chứng minh :  $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}$ .

**Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC.

$$1) \text{ Chứng minh } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = AM^2 - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{a^2}{2} \quad (\forall M).$$

2) Tìm tập hợp điểm M thỏa :

$$a) \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$b) \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = AM^2.$$

$$c) \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}.$$

**Bài 7.** Tam giác ABC vuông, cạnh huyền BC = a. Tìm tập hợp điểm :  $\mathcal{M} = \{M \mid (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = ka^2\}$ .

Biện luận tập hợp theo k.

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp trong đường tròn (O, R). Tìm tập hợp điểm M thỏa :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{9R^2}{2}$ .

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  đều, cạnh a, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Vẽ hình bình hành CBOI.

1) Chứng minh  $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

2) Tìm tập hợp điểm M thỏa  $MA^2 + 4MC^2 = 2MB^2$ .

3) Tính  $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$ .

**Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 cạnh a, b, c. Xét 3 điểm M, N, P định bởi:

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ 2\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NA} = \vec{0} \\ 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0} \end{cases}$$

1) Chứng minh hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

2) Vẽ hình bình hành ABCD. Chứng minh :

$$\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{DP} = 2\overrightarrow{DB}.$$

3) Chứng minh :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2).$$

## HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.** 1)  $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$  ;  $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .

2)  $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AF}$ .

**Bài 2.** 1) Xác định điểm E. Gọi G là trọng tâm  $\triangle ABC$ , I là trung điểm cạnh AB và K là điểm đối xứng của G qua I.

Yêu cầu bài toán tương đương với :  $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IC}$ . Suy ra

cách dựng điểm E.

2) Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$3\overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MF} \ (\forall M) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ F \equiv E \text{ (cố định).} \end{cases}$$

3)  $\mathcal{L} = \{M \mid |\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{MD}|\} = (\Delta) : \text{trung trục đoạn ED.}$

**Bài 3.** 1) a), b) Sử dụng quy tắc trung điểm và tính chất đường trung bình.

2) (1a)  $\Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$  (đpcm).

3) Yêu cầu bài toán tương đương với :  $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OA}|$ . Tập hợp điểm M là đường tròn (O, OA) tức là đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**Bài 4.** 1) Qua M, kẻ ba đường thẳng song song với ba cạnh tam giác đều ABC, ta được ba hình bình hành và ba tam giác đều nhận MD, ME, MF làm đường cao. Do O là trọng tâm  $\triangle ABC$ , sử dụng quy tắc trung điểm và quy tắc hình bình hành suy ra đpcm.

2) Ta có :  $|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{MO}|;$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| &= R; \\ \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= 3\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

Suy ra :  $|\overline{OG}| = \frac{1}{2}|\overline{OM}| = \frac{1}{2}R.$

Tập hợp điểm G là đường tròn  $\left(O, \frac{R}{2}\right).$

**Bài 5.** 1) a)  $\overline{OE} = -\frac{k}{2}(\overline{MC} + \overline{ND})$  ;  $\overline{OF} = \frac{1}{2}(\overline{MC} + \overline{ND})$ . Suy ra

$$\overline{OE} + k\overline{OF} = \vec{0} \Leftrightarrow O \in EF.$$

b) Tập hợp điểm O là đoạn thẳng EF.

2) Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OP} = \overline{OM} + k(\overline{PD} - \overline{MC}) \\ \overline{OQ} = \overline{ON} + k(\overline{QC} - \overline{ND}) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{OP} + \overline{OQ} = \vec{0}.$$

**Bài 6.** 1) Gọi O là tâm hình thoi ABCD :

$$\overline{MB} \cdot \overline{MC} = OM^2 - \frac{a^2}{4};$$

$$\overline{MA} \cdot \overline{MD} = OM^2 - \frac{3a^2}{4};$$

$$AM^2 - \overline{AM} \cdot \overline{AD} = \overline{AM} \cdot \overline{DM} = \overline{MA} \cdot \overline{MD}.$$

Suy ra :  $\overline{MB} \cdot \overline{MC} = AM^2 - \overline{AM} \cdot \overline{AD} + \frac{a^2}{2}$  (đpcm).

2) a)  $\overline{MB} \cdot \overline{MC} = AM^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow \overline{AM} \cdot \overline{AD} = 0.$

Tập hợp cần tìm là  $(\Delta_1) \perp AD$  tại A.

b)  $\overline{MB} \cdot \overline{MC} = AM^2 \Rightarrow \overline{AK} \cdot \overline{AD} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$  (K là hình chiếu của M lên AD cố định). Tập hợp cần tìm là  $(\Delta_2) \perp AD$  tại K.

c)  $\overline{MB} \cdot \overline{MC} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{DM} = 0$ . Tập hợp cần tìm là đường tròn đường kính AD.

**Bài 7.** Gọi G là trọng tâm  $\Delta ABC$  và I là trung điểm cạnh BC. Ta xét hai trường hợp sau :

•  $k = 0$  : Yêu cầu bài toán tương đương với  $\overline{MI} \cdot \overline{MG} = 0$ .

$\mathcal{M}$  là đường tròn đường kính IG.

•  $k \neq 0$ . Gọi O là trung điểm IG.

Yêu cầu bài toán tương đương với  $OM^2 = \frac{a^2}{12}(2k+1)$ .

$k < -\frac{1}{2}$  :  $\mathcal{M} = \emptyset$ .

$k = -\frac{1}{2}$  :  $\mathcal{M} = \{O\}$ .

$k > -\frac{1}{2}$  :  $\mathcal{M} = \left( O, \frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{2k+1} \right)$ .

**Bài 8.** Từ  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - \frac{R^2}{2} + \overline{OM} \cdot \overline{OC} \Rightarrow OM^2 = 2R^2$ . Tập hợp điểm M là đường tròn  $(O, R\sqrt{2})$ .

**Bài 9.** 1)  $\overline{IA} - 2\overline{IB} + 4\overline{IC} = \overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} + 3(\overline{IC} - \overline{IB})$   
 $= 3(\overline{IO} + \overline{IB}) = \vec{0}$ .

2)  $MA^2 - 2MB^2 + 4MC^2 = 0 \Rightarrow IM^2 = \frac{2a^2}{3}$ . Tập hợp điểm

M là đường tròn  $\left( I, \frac{a\sqrt{6}}{3} \right)$ .

3) Gọi H là trung điểm của BC :

$$\overline{IA} \cdot \overline{IB} + \overline{IA} \cdot \overline{IC} = 2\overline{IA} \cdot \overline{IH} = \frac{5}{3}a^2.$$

**Bài 10.1)** Gọi G là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Chứng minh :

$$\overline{GM} + \overline{GN} + \overline{GP} = \vec{0}$$

2) Suy từ câu 1)

3) Từ  $\overline{MA} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \frac{1}{3}BC^2$  suy ra :

$$\overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{BN} \cdot \overline{CA} + \overline{CP} \cdot \overline{AB} = -\frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2).$$

## B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Trong các dữ kiện sau, câu nào xác định được 1 vectơ duy nhất ?

- A) Hai điểm phân biệt.      B) Hướng một vectơ.  
C) Độ dài một vectơ.      D) Hướng và độ dài.

**Câu 2.** Cho hình bình hành ABCD. Từ đỉnh A, ta vẽ được bao nhiêu vectơ có gốc là A.

- A) 1.      B) 2.  
C) 3.      D) 4.

**Câu 3.** Cho  $\triangle ABC$ . Phát biểu nào sau đây đúng ?

- A)  $\frac{12}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| \cdot |\overline{CA}|} \in \mathbb{R}$ .      B)  $\frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{|\overline{BC}|} = 1$ .  
C)  $|\overline{AB} + \overline{BC}| \geq |\overline{AC}|$ .      D)  $|\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}| = 0$ .

**Câu 4.** Cho  $\triangle ABC$ . Phát biểu nào sau đây sai ?

- A)  $\frac{\overline{AB} - \overline{AC}}{|\overline{BC}|} = -1$ .      B)  $\frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA}}{|\overline{BC}|} \neq 0$ .  
C)  $\overline{AB} - \overline{AC} > 0$ .      D)  $\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} = 0$ .

**Câu 5.** Cho  $\triangle ABC$  đều, cạnh a. Phát biểu nào sau đây sai ?

- A)  $|\overline{AB} + \overline{BC}| = a$ .      B)  $|\overline{AB} - \overline{AC}| = a$ .  
C)  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = a$ .      D)  $|\overline{AB} - \overline{CB}| = a$ .

**Câu 6.** Cho hình bình hành ABCD tâm O. Phát biểu nào sau đây sai ?

- A)  $\overline{AO} + \overline{OC} = \overline{AC}$ .      B)  $\overline{AB} + \overline{OD} = \overline{AO}$ .  
C)  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{0}$ .      D)  $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$ .

**Câu 7.** Cho tứ giác lồi ABCD. Phát biểu nào sau đây sai ?

- A)  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{0}$ .  
B)  $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{CD}$ .  
C)  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{CB}$ .  
D)  $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD}$ .

**Câu 8.** Cho hình bình hành ABCD tâm O. Phát biểu nào sau

đây sai ?

A)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$ .                      B)  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ .

C)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ .    D)  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$ .

- Câu 9.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi I, J, K là trung điểm của BC, CA, AB. Điểm M trong mặt phẳng thoả  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Hỏi phát biểu nào sau đây sai : M trùng với
- A) điểm I.                                      B) trung điểm của AI.  
C) trung điểm của KJ.                      D) tâm của hình bình hành AKIJ.

- Câu 10.** Cho  $\triangle ABC$ . Điểm N thoả quan hệ  $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$  thì N trùng với :
- A) Trọng tâm  $\triangle ABC$ .  
B) Đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCN.  
C) Trung điểm cạnh BC.  
D) Đỉnh B.

- Câu 11.** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến AD. Gọi M là trung điểm của AD. BM cắt AC tại N. Tỷ số  $\frac{\overrightarrow{NM}}{\overrightarrow{NB}}$  có trị số là :
- A)  $\frac{1}{3}$ .    B)  $\frac{1}{4}$ .  
C)  $\frac{1}{5}$ .    D)  $\frac{2}{3}$ .

- Câu 12.** Cho  $\triangle ABC$  đều, cạnh a nội tiếp trong đường tròn tâm O. Cho điểm M tùy ý trên đường tròn,  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$  có giá trị :
- A)  $3a$ .    B)  $a\sqrt{3}$ .  
C)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .    D)  $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

- Câu 13.** Cho  $\triangle ABC$ . Tập hợp các điểm M nào thoả các quan hệ sau đây là tập hợp  $\emptyset$  ?
- A)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ . B)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .  
C)  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$ .                      D)  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .

**Câu 14.** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến  $AD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác và  $M$  là điểm tùy ý. Phát biểu nào sau đây là sai ?

- A)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .      B)  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GD}$ .  
 C)  $\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DG}} = 2$ .      D)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  có phân giác trong là  $AM$ . Phát biểu nào sau đây là đúng ?

- A)  $\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}$ .      B)  $\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = -\frac{AB}{AC}$ .  
 C)  $\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{AB}{AC}$ .      D)  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 16.** Cho  $MNPQ$  là hình bình hành. Phát biểu nào sau đây là sai ?

- A)  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ .      B)  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}$ .  
 C)  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ .      D)  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QN}$ .

**Câu 17.** Gọi  $E, F$  là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $CD$  của hình bình hành  $ABCD$ , tâm  $O$ . Đường chéo  $AC$  cắt  $DE$  và  $BF$  tại  $I$  và  $J$ . Phát biểu nào sau đây là sai ?

- A)  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JC}$ .      B)  $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .  
 C)  $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$ .      D)  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ .

**Câu 18.**  $ABCD$  là hình thang, hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  gặp nhau tại  $O$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của hai cạnh đáy  $AB$  và  $CD$ . Đường thẳng qua  $O$  và song song với hai cạnh đáy cắt hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$  tại  $E$  và  $F$ . Phát biểu nào sau đây là sai ?

- A)  $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .  
 B)  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$ .  
 C)  $\overrightarrow{OM} // \overrightarrow{ON}$ .  
 D)  $\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ .



**Câu 19.** Cho hai hình bình hành ABCD, ABEF chung cạnh AB và  $\overrightarrow{AD}$  không cùng phương với  $\overrightarrow{AF}$ . Phát biểu nào sau đây là đúng ?

- A)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}$ .  
 B)  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ .  
 C)  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$ .  
 D)  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$ .

**Câu 20.** ABCD là hình chữ nhật tâm O. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

- A)  $\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}$ .  
 B)  $\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2}$ .  
 C)  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .  
 D)  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD}$ .

**Câu 21.** Cho  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Nếu  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$  thì :

- A)  $\vec{a} // \vec{b}$ .  
 B)  $\vec{a} = \vec{b}$ .  
 C)  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .  
 D)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .

**Câu 22.** Cho  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Nếu  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$  thì :

- A)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.  
 B)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.  
 C)  $\vec{a} = \vec{b}$ .  
 D)  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

**Câu 23.** Cho hình vuông ABCD, cạnh bằng 1. Biểu thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

có giá trị :

- A) 0.  
 B) 8.  
 C)  $4\sqrt{2}$ .  
 D) 16.

**Câu 24.** ABCD là hình thoi, cạnh a, tâm O. Biểu thức

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

có giá trị :

- A)  $-a^2$ .  
 B)  $a^2$ .  
 C)  $-4a^2$ .  
 D)  $4a^2$ .

**Câu 25.**  $\triangle ABC$  đều cạnh bằng 1. Về phía ngoài tam giác, vẽ tam

giác ABD vuông cân tại A. Biểu thức  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$  có giá trị :

A)  $-\frac{1}{2}$ .

B)  $\frac{1}{2}$ .

C)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 26.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh bằng  $\sqrt{3}$ , nội tiếp trong đường tròn tâm O. Biểu thức  $\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$  có giá trị :

A) 1.

B)  $\frac{3}{2}$ .

C)  $-\frac{3}{2}$ .

D) -1.

**Câu 27.** Cho ABCD là hình vuông. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

B)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ .

C)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ .

D)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$ .

**Câu 28.** Gọi AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn tâm O. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ .

B)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ .

C)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

D)  $\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = 0$ .

**Câu 29.** ABCD là hình vuông tâm O. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

B)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ .

C)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ .

D) Cả ba câu trên.

**Câu 30.** Tam giác ABC đều, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .

B)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$ .

C)  $\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$ .

D)  $\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$ .

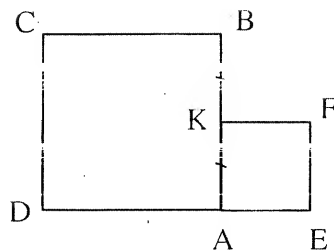


A)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

B)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$ .

C)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ .

D)  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{FB}$ .



**Câu 37.** Cho  $\triangle ABC$ . Về phía ngoài tam giác, vẽ hai tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$ .

B)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ .

C)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

D) Trung tuyến AM của  $\triangle AEF$  là đường cao  $\triangle ABC$ .

**Câu 38.** Cho  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây là sai ?

A)  $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$ .

B)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ .

C)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  và  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ .

D) Cả ba câu đều sai.

**Câu 39.** Cho  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây là sai ?

A)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{b}, \vec{a})$ .

B)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]$ .

C)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]$ .

D)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2]$ .

**Câu 40.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  và  $\widehat{BAC} = 40^\circ$ . Về phía ngoài tam giác, vẽ hai hình vuông ABFE và ACMN. Gọi O là trung điểm của EN. Để chứng minh  $AO \perp BC$ , một học sinh lập luận qua ba bước :

(I)  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AN})$  và  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ . Suy ra :

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}).$$

$$(II) \text{ Vì } : \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\text{và } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 12 \cos 130^\circ.$$

$$(III) \text{ Vậy } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BC}.$$

Chọn mệnh đề đúng.

A) Chỉ (I).

B) Chỉ (II).

C) Chỉ (III).

D) Cả (I), (II), (III).

**Câu 41.** Cho hai điểm A, B cố định. Quỹ tích các điểm M thỏa  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$  là :

A) Đường thẳng AB.

B) Đường thẳng  $(\Delta_1) \perp AB$  tại A.

C) Đường trung trực  $(\Delta_2)$  của đoạn AB.

D) Đường tròn.

**Câu 42.** Cho  $\triangle ABC$ . Quỹ tích các điểm M thỏa  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  là :

A) Đường thẳng AB.

B) Đường thẳng  $(\Delta_1) \perp AB$  tại A.

C) Đường thẳng  $(\Delta_2) \perp AB$  tại C.

D) Đường trung trực  $(\Delta_3)$  của AB.

**Câu 43.** Cho  $\triangle ABC$ . Quỹ tích các điểm M thỏa  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AM^2$  là

A) Đường thẳng AB.

B) Đường thẳng  $(\Delta_1) \perp AB$  tại A.

C) Đường trung trực  $(\Delta_2)$  của AB.

D) Đường tròn đường kính AB.

**Câu 44.** Cho  $\triangle ABC$ . Quỹ tích các điểm M thỏa

$$\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 0$$

là :

A) Đường tròn đường kính BC.

- B) Đường tròn khác.
- C) Đường tròn đường kính AB.
- D) Đường tròn đường kính AC.

**Câu 45.** Cho ABCD là hình chữ nhật. Quỹ tích các điểm M thoả  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$  là :

- A) Đường chéo BD.
- B) Đường chéo AC.
- C) Đường tròn qua A, B, C.
- D) Đường thẳng  $(\Delta) \perp BD$  tại D.

**Câu 46.** Cho ABCD là hình chữ nhật. Quỹ tích các điểm M thoả  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$  là :

- A) Đường thẳng AB.
- B) Đường trung trực cạnh AD.
- C) Đường trung trực cạnh AB.
- D) Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.

**Câu 47.** Cho  $\triangle ABC$ . Xét  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB}$ . Một học sinh phát biểu :

- A) Điểm M nằm trên cạnh BC.
- B) Điểm M nằm trên đường trung trực cạnh BC.
- C) Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM.
- D) Điểm M là trọng tâm  $\triangle ABC$ .

Câu nào đúng ?

**Câu 48.** Cho  $\triangle ABC$ . Quỹ tích các điểm M thoả

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$$

là :

- A) Đường thẳng AB.
- B) Đường thẳng  $(\Delta_1) \perp AB$  tại C.
- C) Đường thẳng  $(\Delta_2) \perp BC$  tại A.
- D) Đường tròn đường kính AB.

**Câu 49.**  $\triangle ABC$  vuông tại A. Quỹ tích các điểm M :

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MA^2$$

là :

- A) Đường thẳng BC.
- B) Đường tròn đường kính BC.
- C) Đường thẳng  $(\Delta_1) \perp BC$  tại A.
- D) Đường thẳng  $(\Delta_2)$  vuông góc với trung tuyến tại A.

**Câu 50.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Quỹ tích các điểm M thoả :

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + MA^2$$

là :

- A) Đường thẳng AC.
- B) Đường thẳng AB.
- C) Đường thẳng BC.
- D) Đường trung trực cạnh BC.

### GIẢI THÍCH - HƯỚNG DẪN

**Câu 3.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  không cùng phương với  $\overrightarrow{BC}$ .

Số thực  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$  không thể so với  $\overrightarrow{AC}$ .

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}| = 0 \neq \vec{0}.$$

Vậy câu A).

**Câu 4.**  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} > \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} > \overrightarrow{AC}$  là sai, vì ta không thể so sánh hai vectơ. Câu C).

**Câu 5.** Kẻ đường cao AH thì  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AH}| = a\sqrt{3}$ . Câu C).

**Câu 6.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ . Câu D).}$$

**Câu 7.**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} \text{ . Câu B).}$$

**Câu 8.**  $AC + BD = 2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ . Câu A).

**Câu 9.**  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MJ}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $KJ$ , và dĩ nhiên, là trung điểm của  $AI$  và là tâm của hình bình hành  $AKIJ$ . Câu A).

**Câu 10.**  $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CB}$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow ABCN$  là hình bình hành. Câu B).

**Câu 11.** Kẻ  $DE \parallel BMN$ .  $\triangle ADE : \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{ED}$ ;  $\triangle CBN : \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2} \overrightarrow{NB}$

Suy ra  $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{NB}$ . Câu B).

**Câu 12.** Vì  $\triangle ABC$  đều nên  $O$  là trọng tâm tam giác  $\forall M \in (O)$ :  
 $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{MO} = 3R = a\sqrt{3}$ . Câu B).

**Câu 13.**  $M = \{M / \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\} = \emptyset$  vì  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ . Sai.

Câu D).

**Câu 14.** Câu C) sai, vì  $\overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{DG}$ . Câu C).

**Câu 15.** Câu A) sai vì  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương. Câu C) sai vì  $\overrightarrow{MB}$  và  $\overrightarrow{MC}$  ngược hướng. Vậ câu B).

**Câu 16.** Câu A) sai vì  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ . Câu A).

**Câu 17.** Câu C) sai vì  $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$ . Câu C).

**Câu 18.** Câu A) đúng vì dùng tính chất song song chứng minh được  $OE = OF$ .

Câu C) đúng : tính chất hình thang.

Câu D) đúng : Quy tắc “trung tuyến”. Câu B).



**Câu 19.** ABCD là hình bình hành

$$\left. \begin{array}{l} \text{ABCD là hbh} \Leftrightarrow \overline{DC} = \overline{AB} \\ \text{ABEF là hbh} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{FE} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{DC} = \overline{FE} \Leftrightarrow \text{DCEF là hbh}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CE} = \overline{DF}.$$

Câu D).

**Câu 20.** Câu A) và D) sai, vì  $\overline{OB} + \overline{OD} = \vec{0}$ . Câu C) sai vì  $\overline{AC}$  và  $\overline{BD}$  khác phương. Vậy câu B).

**Câu 21.**  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow (|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = (|\vec{a} - \vec{b}|)^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \text{ Câu C).}$$

**Câu 22.**  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Rightarrow (|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\Rightarrow \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng. Câu A).}$$

**Câu 23.**  $(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})(\overline{BA} + \overline{BC}) = 2\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 0. \text{ Câu A).}$

**Câu 24.** Gọi E, F là trung điểm hai cạnh AB và CD.

$$(\overline{OA} + \overline{OB})(\overline{OC} + \overline{OD}) = 4\overline{OE}\cdot\overline{OF} = -4OE^2 = -a^2. \text{ Câu A).}$$

**Câu 25.**  $\overline{AD}\cdot\overline{AC} = AD\cdot AC \cos(90^\circ + 60^\circ)$

$$= 1 \times 1 \times (-\sin 60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Câu C).}$$

**Câu 26.**  $\triangle ABC$  đều, cạnh bằng  $\sqrt{3}$  nên tâm O là trọng tâm và đường cao tam giác bằng  $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ . Vậy :

$$\overline{OA}(\overline{OB} + \overline{OC}) = \overline{OA}(-\overline{OA}) = -OA^2 = -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = -1.$$

Câu D).

**Câu 27.** Vì  $\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{DC} = AB\cdot DC = AB^2. \text{ Câu B).}$

**Câu 28.**  $AB.AC + AB.AD = AB(AC + AD) = AB^2$ . Câu B) sai.

$$\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} + \vec{0}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -R^2.$$

Câu D) sai.

Câu C) sai vì  $AB \perp CD$ . Vậy chọn câu A).

**Câu 29.** Do tính chất hình vuông : hai đường chéo bằng nhau, vuông góc tại trung điểm mỗi đường. Câu D).

**Câu 30.** Tam giác ABC đều nên O là trọng tâm, nên :

$$\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}(-\overrightarrow{OA}) = -OA^2. \text{ Câu C).}$$

$$\text{Câu 31. } \overrightarrow{IA}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{IA}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ED}) = \overrightarrow{IA}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AB})$$

$$= \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \underbrace{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AB}}_0 = IA^2 = 1. \text{ Câu C).}$$

**Câu 32.** Đặt  $AB = a \Rightarrow BC = 2a, BD = a, BH = \frac{a}{2}$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = a.2a.\frac{1}{2} = a^2$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = a.a.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH} = a.\frac{a}{2}.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}. \text{ Vậy câu A), B) đúng.}$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH} = BH^2. \text{ Câu C) đúng. Chọn câu D).}$$

$$\text{Câu 33. } dt(ABCD) = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} AB.AD \sin A.$$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = AB.AD\cos A.$$

Câu C) chỉ đúng với  $\sin A = \cos A \Leftrightarrow A = 45^\circ$ . Vậy câu C)

**Câu 34.** Câu C) sai, vì  $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$ . Ví dụ ABCD là hình vuông cạnh a thì

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = a^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \text{ là sai !. Câu C).}$$

$$\text{Câu 35. } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{OB}) = 0 \\ \Leftrightarrow AD \perp OB. \text{ Câu D).}$$

**Câu 36.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$   
 $\Leftrightarrow AB \perp CF$  (sai). Vậy câu A).

**Câu 37.** Vì  $\widehat{EAF} = \pi - A$  nên  $\cos \widehat{EAF} = -\cos A$ .  
 Vậy  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ . Câu C).

**Câu 38.** Câu A) và C) sai qua ví dụ sau : Cho ABCD là hình vuông.

$$\left. \begin{array}{l} * \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \text{ sai, vì}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

$$* AB = AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}.$$

Trong lúc đó, vì câu B) đúng nên câu D) sai. Câu D).

**Câu 39.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} + a^2 + b^2 - 2\vec{a}\vec{b}) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2); \quad (1)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}). \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a^2 + b^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 2|\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 \leq 0$$

chỉ đúng nếu  $\vec{a} = \vec{b}$  (trái giả thiết  $\vec{a}, \vec{b}$  tùy ý !). Vậy câu D).

**Câu 40.** Câu D).

**Câu 41.** Gọi I là trung điểm của AB. Yêu cầu bài toán trở thành  
 $|2\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$  (không đổi). Quỹ tích là đường  
 tròn  $\left(I, \frac{1}{2}AB\right)$ . Câu D).

**Câu 42.** Yêu cầu bài toán trở thành :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CM}) = 0 \Leftrightarrow CM \perp AB$$

$$\Leftrightarrow M \in (\Delta_2). \text{ Câu C).}$$

**Câu 43.** Yêu cầu bài toán trở thành :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - AM^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow MA \perp MB$$

$$\Leftrightarrow M \text{ thuộc đường tròn đường kính}$$

AB. Câu D).

**Câu 44.** Gọi I là trung điểm cạnh BC và G là trọng tâm  $\Delta ABC$ .

Yêu cầu bài toán trở thành :

$$(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}(3\overrightarrow{MG}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MG} = 0$$

$$\Leftrightarrow MI \perp MG$$

$$\Leftrightarrow M \text{ thuộc đường tròn}$$

đường kính IG. Câu B).

**Câu 45.** Gọi G là trọng tâm  $\Delta ABC$ . Yêu cầu bài toán trở thành

$$3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GD}$$

$$\Leftrightarrow M \in BD. \text{ Câu A).}$$

**Câu 46.** Gọi I, J là trung điểm các cạnh AB và CD. Yêu cầu bài toán trở thành :

$$|2\overrightarrow{MI}| = |2\overrightarrow{MJ}| \Leftrightarrow MI = MJ$$

$$\Leftrightarrow M \text{ thuộc đường trung trực đoạn IJ.}$$

$$\Leftrightarrow M \text{ thuộc đường trung trực cạnh AD.}$$

Câu B).

**Câu 47.** Yêu cầu bài toán trở thành :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow ABCM \text{ là hình bình hành.}$$

Câu C).

**Câu 48.** Yêu cầu bài toán trở thành :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC \\ &\Leftrightarrow M \in (\Delta_2). \text{ Câu C).}\end{aligned}$$

**Câu 49.** Yêu cầu bài toán trở thành :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) &= MA^2 \\ \Leftrightarrow \cancel{MA^2} + \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \cancel{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}} &= \cancel{MA^2} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AI} &= 0 \text{ (I là trung điểm BC)} \\ \Leftrightarrow MA \perp AI &\Leftrightarrow M \in (\Delta_2). \text{ Câu D).}\end{aligned}$$

**Câu 50.** Yêu cầu bài toán trở thành :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + MA^2 \\ \Leftrightarrow \cancel{MA^2} + \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \cancel{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \cancel{MA^2} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} \text{ (E là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật ABEC)} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC}) &= 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow MA \perp CE \\ \Leftrightarrow MA \perp AB &\Leftrightarrow M \in AC. \text{ Câu A).}\end{aligned}$$

## ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1	D	11	B	21	C	31	C	41	D
2	C	12	B	22	A	32	D	42	C
3	A	13	D	23	A	33	C	43	D
4	C	14	C	24	A	34	C	44	B
5	C	15	B	25	C	35	D	45	A
6	D	16	A	26	D	36	A	46	B
7	B	17	C	27	B	37	C	47	C
8	A	18	B	28	A	38	D	48	C
9	A	19	D	29	D	39	D	49	D
10	B	20	B	30	C	40	D	50	A

## HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

### § 1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

#### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

##### 1. Định lý côsin

- Kí hiệu : Cho  $\triangle ABC$  có các góc là  $A, B, C$ , cạnh đối diện tương ứng theo thứ tự đó là  $a, b, c$ .
- Công thức :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \quad (I)$$

##### 2. Định lý sin

- Kí hiệu :  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- Công thức :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (II)$$

##### 3. Độ dài đường trung tuyến

- Kí hiệu :  $m_a, m_b, m_c$  là các trung tuyến vẽ từ các đỉnh  $A, B, C$ .

- Công thức :

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 &= \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{aligned} \quad (III)$$

#### 4. Công thức tính diện tích tam giác

- Kí hiệu :  $S$  là diện tích tam giác  $ABC$ .

$h_a, h_b, h_c$  là các đường cao vẽ từ các đỉnh  $A, B, C$ .

$r$  là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

$2p = a + b + c$  là chu vi tam giác.

- Công thức :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c \\ S &= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B \\ S &= \frac{abc}{4R} \\ S &= pr \\ S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned} \quad (IV)$$

### B. CÁC DẠNG TOÁN

#### Dạng 1. TÍNH CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

**Ví dụ 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 13, b = 8, c = 7$ .

1) Tính góc  $A$ , suy ra  $S, h_a, R, r, m_a$ .

2) Tính  $S$ , suy ra  $A, h_a, R, r, m_a$ .

### ***Giải***

1) Áp dụng định lý côsin :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow A = 120^\circ.$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}56 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}.$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 14\sqrt{3}}{13} = \frac{28\sqrt{3}}{13}.$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 13}{4 \cdot 14\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 14\sqrt{3}}{7+8+13} = \sqrt{3}.$$

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{49+64}{2} - \frac{169}{4} = \frac{57}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{57}}{2}.$$

$$2) 2p = a + b + c = 7 + 8 + 13 = 28 \Rightarrow p = 14.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{14(1)(6)(7)} = 14\sqrt{3}.$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{28\sqrt{3}}{56} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ A = 120^\circ \end{cases}$$

$$\bullet A = 60^\circ : a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ \\ = 64 + 49 - 2(56)\left(\frac{1}{2}\right) = 113 - 56 = 57 \text{ (loại)}$$

$$\bullet A = 120^\circ : a^2 = 64 + 49 - 2(56)\left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169 \text{ (nhận)}$$

Vậy  $A = 120^\circ$ .

$$\text{Tương tự câu 1) : } h_a = \frac{28\sqrt{3}}{13}, R = \frac{13\sqrt{3}}{3}, r = \sqrt{3}, m_a = \frac{\sqrt{57}}{2}.$$

**Ví dụ 2.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ ,  $R = \sqrt{6}$ , biết  $B = 45^\circ, C = 60^\circ$ .

1) Tính các cạnh tam giác.



2) Tính  $S$ ,  $\sin A$ ,  $h_a$ ,  $r$ .

### Giải

1) Áp dụng định lí sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \begin{cases} b = 2R \sin B = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3} \\ c = 2R \sin C = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}. \end{cases}$$

Áp dụng định lí cosin :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos C \Rightarrow a^2 - 2\sqrt{3}a - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} - 3 < 0 \\ a = \sqrt{3} + 3 > 0 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{3} + 3.$$

$$2) S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} 3\sqrt{2} (\sqrt{3} + 3) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} (\sqrt{3} + 3).$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{3(\sqrt{3} + 3)}{3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$S = \frac{1}{2} ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{3(\sqrt{3} + 3)}{\sqrt{3} + 3} = 3.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3(\sqrt{3} + 3)}{3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

**Ví dụ 3.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , góc đáy  $B = C = 30^\circ$ , cạnh đáy  $BC = a = \sqrt{3}$ .

1) Tính  $R$ ,  $r$ .

2) Tính  $(m_b - m_a)(m_b + m_a)$ .

### Giải

1) Áp dụng định lí sin :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

$$b = c = 2R \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (2 - \sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned} 2) (m_b - m_a)(m_b + m_a) &= m_b^2 - m_a^2 \\ &= \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \\ &= \frac{2a^2 - b^2 - 2b^2 + a^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 - b^2) \\ &= \frac{3}{4}(3 - 1) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

## Dạng 2. CHỨNG MINH QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

**Ví dụ 1.** Chứng minh với mọi tam giác vuông, hai cạnh góc vuông  $b, c$  ta có quan hệ :  $b + c = 2(R + r)$ .

**Giải**

$$* \begin{cases} S = \frac{1}{2} bc \\ S = pr \end{cases} \Rightarrow r = \frac{bc}{2p} = \frac{bc}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{bc(b+c-\sqrt{b^2+c^2})}{2bc} = \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}.$$

$$* \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R \sin 90^\circ = 2R = \sqrt{b^2+c^2}.$$

$$\text{Vậy : } 2r = b + c - 2R \Leftrightarrow b + c = 2(R + r).$$

**Ví dụ 2.** Chứng minh với mọi tam giác ABC, ta có :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

### Giải

Áp dụng định lí côsin và sin cho góc A :

$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \sin A = \frac{a}{2R} \end{cases} \Rightarrow \cot A = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$$

Tương tự :  $\cot B = \frac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc}$

$$\cot C = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$$

$$\text{Suy ra : } \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{abc}{R}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

**Ví dụ 3.** Chứng minh công thức diện tích tam giác ABC :

$$S = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A).$$

### Giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A) &= \frac{1}{2}(a^2 \sin B \cos B + b^2 \sin A \cos A) \\ &= \frac{1}{2} \left( a^2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b^2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{ab}{4Rc} (a^2 - b^2 + c^2) + \frac{ab}{4Rc} (b^2 + c^2 - a^2) \right) \\ &= \frac{ab}{8Rc} (2c^2) = \frac{abc}{4R} = S. \end{aligned}$$

### Dạng 3. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

**Ví dụ 1.** Chứng minh nếu các cạnh tam giác thỏa :

$$\begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = 1 + \frac{b^2}{ac} \end{cases} \quad (2)$$

thì đó là tam giác đều.

### ***Giải***

Ta có :  $(1) \Leftrightarrow b^2 + c^2 - bc = a^2.$  (3)

$(2) \Leftrightarrow a^2 + c^2 - ac = b^2.$  (4)

Theo định lí hàm số cosin :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$  (5)

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B.$  (6)

Từ (3) và (5) :  $\cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^\circ.$

Từ (4) và (6) :  $\cos B = \frac{1}{2} \Leftrightarrow B = 60^\circ.$

Vậy  $\triangle ABC$  đều.

**Ví dụ 2.** Nhận dạng tam giác ABC nếu ta có :

$$S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c).$$

### ***Giải***

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \left( p = \frac{a+b+c}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 4S = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

So với giả thiết thì :

$$(a+b+c)(b+c-a) = (a+b-c)(a-b+c)$$

$$\Leftrightarrow (b+c+a)(b+c-a) = [a+(b-c)][a-(b-c)]$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = a^2 - (b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 + (b-c)^2 = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } A.$$

*Cách khác.*

$$S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$$

$$= \frac{1}{4}[a+(b-c)][a-(b-c)] = \frac{1}{4}[(a^2) - (b-c)^2]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}{a^2} - (b^2 + c^2 - 2bc) \right]$$

$$= \frac{1}{2} bc(1 - \cos A) \text{ và } S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

Vậy:  $1 - \cos A = \sin A \Rightarrow A = 90^\circ.$

**Ví dụ 3.** Tìm tính chất đặc biệt của  $\triangle ABC$  nếu ta có:

$$2a \cos A = b \cos C + c \cos B$$

**Giải**

Áp dụng định lý sin:

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$2(\cancel{2R} \sin A) \cos A = (\cancel{2R} \sin B) \cos C + (\cancel{2R} \sin C) \cos B$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin A \cos A = \sin(B + C) = \sin A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \text{ (do } \sin A \neq 0) \Leftrightarrow A = 60^\circ.$$

Vậy  $\triangle ABC$  có góc A bằng  $60^\circ$ .

### C. BÀI TẬP

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  có cạnh  $AB = b = 4$ ,  $AC = c = 3$ ,  $BC = a > 5$  và diện tích  $S = 3\sqrt{3}$ .

1) Tính góc A và cạnh a.

2) Tính các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác.

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có chu vi  $2p = 3 + \sqrt{3}$  sao cho  $A = 3C$  và  $B = 2C$ .

1) Tính các cạnh tam giác.

2) Tính độ dài đường phân giác trong AD của tam giác.

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 13$ ,  $A = 120^\circ$ ,  $b + c = 15$  ( $b > c$ ).

1) Tính b, c và S.

2) Tính R, r và  $m_a$ .

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $b = 2\sqrt{2}$  và  $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ .

1) Tính các góc  $A, B, C$  của tam giác.

2) Suy ra giá trị  $\sin 15^\circ$ .

**Bài 5.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , tâm  $O$ , đường chéo  $AC = 4$  và đường chéo  $BD = 2$  hợp với nhau góc  $60^\circ$ . Cho biết  $AB < BC$ .

1) Tính các cạnh và diện tích hình bình hành.

2) Tính tích  $R.r$  của các bán kính của hai đường tròn ngoại và nội tiếp  $\triangle ABC$ .

**Bài 6.** Tam giác  $ABC$  có  $b + c = 2a$ . Chứng minh :

1)  $2\sin A = \sin B + \sin C$ .

2)  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .

**Bài 7.** Nhận dạng  $\triangle ABC$  nếu ta có :  $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$ .

**Bài 8.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Trên các cạnh  $AB, BC, CA$  lấy các điểm  $M, N, P$  cho bởi  $AM = BN = CP = x$  ( $0 < x < a$ ).

Tìm  $x$  để  $dt(MNP) = \frac{1}{3}dt(ABC)$ .

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  có đường phân giác trong góc  $A$  là  $AD = m$ .

1) Cho  $A = 120^\circ$ . Chứng minh :  $\frac{1}{m} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

2) Cho  $A$  tùy ý. Gọi  $I$  là trung điểm của  $AD$ . Qua  $I$ , kẻ  $IEF$  ( $E \in AB, F \in AC$ ) sao cho  $dt(AEF) = \frac{1}{4}dt(ABC)$ . Chứng minh :

$$\frac{AE + AF}{AB + AC} = \frac{1}{2}.$$

**Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  và phân giác  $AD = 12$ . Cho  $DC = 6$  và  $DB = 4$ . Tính hai cạnh  $AB$  và  $AC$  của tam giác.

## LỜI GIẢI

**Bài 1.** 1)  $S = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = 60^\circ \\ \widehat{A} = 120^\circ \end{cases}$

Mà  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A > 25$  (do  $a > 5$ ) nên :

$$\cos A < \frac{b^2 + c^2 - 25}{2bc} = \frac{16 + 9 - 25}{2 \cdot 12} = 0 \Rightarrow \widehat{A} \text{ tù.}$$

Vậy  $A = 120^\circ$ .

Do đó  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 16 + 9 - 2 \cdot 12 \left(-\frac{1}{2}\right) = 37$ .

Suy ra :  $a = \sqrt{37} > 5$ .

2)  $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{\sqrt{111}}{3}$ .

$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3\sqrt{3}}{7 + \sqrt{37}} = \frac{\sqrt{3}(7 - \sqrt{37})}{2}$ .

**Bài 2.** 1) Ta có :

$$\begin{cases} A = 3C \\ B = 2C \\ A + B + C = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 90^\circ \\ B = 60^\circ \\ C = 30^\circ \end{cases}$$

Ta có :  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2$ , suy

ra :

$$\begin{cases} a = 2\sin 90^\circ = 2 \\ b = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3} \\ c = 2\sin 30^\circ = 1. \end{cases}$$

2) Do  $A = 90^\circ$  nên  $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = 45^\circ$ .

$\triangle ABD: \frac{BD}{\sin 45^\circ} = \frac{AD}{\sin 60^\circ} \Rightarrow BD = \frac{\sqrt{6}}{3} AD$ .

$\triangle ACD: \frac{CD}{\sin 45^\circ} = \frac{AD}{\sin 30^\circ} \Rightarrow CD = \sqrt{2} AD$ .

$$\text{Do đó : } 2 = \frac{\sqrt{6AD}}{3} + \sqrt{2AD} \Rightarrow AD = \frac{6}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}.$$

$$\text{Vậy : } AD = \frac{1}{2} \sqrt{2}(3 - \sqrt{3}).$$

*Cách khác.* Ta có :  $dt(ABC) = dt(ABD) + dt(ACD)$ , do đó :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}bc &= \frac{1}{2}cAD \sin 45^\circ + \frac{1}{2}bAD \sin 45^\circ \\ \Leftrightarrow AD &= \frac{bc}{(b+c)\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}(3 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\text{Bài 3. } 1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow b^2 + c^2 + bc = 169. \quad (1)$$

$$b + c = 15 \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 225. \quad (2)$$

Lấy (2) - (1) vế theo vế ta được :  $bc = 56$ .

Vậy  $b, c$  là nghiệm phương trình :

$$t^2 - 15t + 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 \\ t = 8. \end{cases}$$

Do  $b > c$  :  $b = 8, c = 7$ .

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}(8)(7) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 14\sqrt{3}.$$

$$2) \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{13}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2 \cdot 14\sqrt{3}}{7 + 8 + 13} = \sqrt{3}.$$

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{49 + 64}{2} - \frac{169}{4} = \frac{57}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{57}}{2}.$$

$$\text{Bài 4. } 1) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 12}{2(2\sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra :  $A = 120^\circ$ .

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 12 - 8}{2(\sqrt{6} - \sqrt{2})(2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^\circ.$$



Vậy :  $C = 180^0 - (120^0 + 45^0) = 15^0$ .

$$2) \sin C = \frac{c}{b} \sin B \Rightarrow \sin 15^0 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

**Bài 5.** 1)  $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos 60^0$

$$= 4 + 1 - 2(2)(1)\left(\frac{1}{2}\right) = 3.$$

Suy ra :  $AB = \sqrt{3}$ .

$$AD^2 = OA^2 + OD^2 - 2OA \cdot OD \cos 120^0$$

$$= 4 + 1 - 2(2)(1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$$

Suy ra :  $AD = \sqrt{7}$ .

$$dt(ABCD) = 4dt(OAB) = 4 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin 60^0 = 2\sqrt{3}.$$

$$2) S = \frac{1}{2} dt(ABCD) = \sqrt{3} = \frac{(AB \cdot BC \cdot CA)}{4R}$$

$$= \frac{1}{2} (AB + BC + CA)r$$

$$\text{Vậy : } R \cdot r = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{2(AB + BC + CA)} = \frac{2\sqrt{21}}{4 + \sqrt{3} + \sqrt{7}}.$$

**Bài 6.** 1) Áp dụng định lí sin :

$$b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 2(2R) \sin A$$

$$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A.$$

$$2) S = \frac{1}{2} a h_a \Rightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{a}{S} = \frac{2a}{2S} = \frac{b+c}{2S}$$

$$= \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{b}{bh_b} + \frac{c}{ch_c} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

**Bài 7.** Áp dụng định lí trung tuyến : Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\left( \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) + \left( \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right) = 5 \left( \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 10b^2 + 10c^2 - 5a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$

$$\begin{aligned} \text{Bài 8. } \Delta AMP : MP^2 &= (a-x)^2 + x^2 - 2x(a-x)\cos 60^\circ \\ &= 3x^2 - 3ax + a^2 > 0 \quad (\forall x) \end{aligned}$$

Do  $\Delta AMP = \Delta BNM = \Delta CPN$  nên yêu cầu bài toán trở thành :

$$3\left(MP^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow MP^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 9ax + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a/3 \\ x = 2a/3. \end{cases}$$

**Bài 9.** 1) Ta có :  $dt(ABC) = dt(ABD) + dt(ACD)$ , do đó :

$$\frac{1}{2}bc \sin 120^\circ = \frac{1}{2}cm \sin 60^\circ + \frac{1}{2}bm \sin 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow bc = cm + bm \quad (\text{do } \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (\text{đpcm}).$$

2) Đặt  $AE = x$ ,  $AF = y$ , ta có :

$$dt(AEF) = dt(AEI) + dt(AFI) \Leftrightarrow xy \sin A = (x+y)AI \sin \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2xy \cos \frac{A}{2} = (x+y)AI. \quad (1)$$

$$\text{Tuong tự : } 2bc \cos \frac{A}{2} = (b+c)AD. \quad (2)$$

Do I là trung điểm của AD nên từ (1) và (2) cho ta :

$$\frac{x+y}{b+c} = \frac{2xy}{bc}. \quad (3)$$

$$\text{Vì } 4dt(AEF) = dt(ABC) \Rightarrow 4xy = bc. \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } \frac{AE+AF}{AB+AC} = \frac{1}{2}.$$

**Bài 10.** Đặt  $\widehat{ADB} = \alpha$ .

$$\Delta ABD : AB^2 = 144 + 16 - 2(12)(4)\cos \alpha = 160 - 96\cos \alpha$$

$$\Delta ACD : AC^2 = 144 + 36 - 2(12)(6)\cos(180^\circ - \alpha)$$

$$= 180 + 144 \cos \alpha .$$

Ta có :

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{160 - 96 \cos \alpha}{180 + 144 \cos \alpha} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{720}{1440} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 60^\circ .$$

$$\text{Kẻ } AH \perp BC \text{ thì } DH = \frac{1}{2} AD = 6 .$$

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2 = 338 \\ AC^2 - AB^2 = 2BC \cdot HD = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} AC^2 = 229 \\ AB^2 = 109. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } AC = \sqrt{229}, AB = \sqrt{109} .$$

#### D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn  $(O, R)$  với  $A = 60^\circ, C = 45^\circ$ .

- 1) Tính các cạnh tam giác.
- 2) Suy ra giá trị  $\sin 105^\circ$ .

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = \sqrt{6}, b = 2, c = \sqrt{3} + 1$ .

- 1) Tính các góc tam giác.
- 2) Tính  $h_a, R, r$ .

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  có  $bc = a^2$ . Chứng minh :

- 1)  $\sin B \cdot \sin C = \sin^2 A$ .
- 2)  $h_b \cdot h_c = h_a^2$

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Chứng minh :  $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$ .

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, trung tuyến AE. Qua trọng tâm G của tam giác ABC kẻ đường thẳng cắt AB, AC tại M, N sao cho :  $dt(AMN) = \frac{3}{4}dt(ABC)$ .

- 1) Chứng minh :  $3xy = bx + cy$  với  $AM = x; AN = y$ .

2) Xác định vị trí của  $M$  trên cạnh  $AB$  để bài toán có lời giải.

**Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn  $(O, R)$  sao cho đường cao  $AH = R$ . Chứng minh :  $\sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2}$ .

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  có hai trung tuyến  $BM = 6$ ,  $CN = 9$  hợp với nhau một góc  $120^\circ$ . Tính các cạnh tam giác.

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  có góc  $A = 60^\circ$ , nội tiếp trong đường tròn bán kính  $R = 2$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp của  $\triangle ABC$ . Tính bán kính  $R'$  của đường tròn (IBC).

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  góc  $A$  nhọn. Kẻ hai đường cao  $CE$  và  $BF$ . Cho biết

$$\begin{cases} EF = 2\sqrt{2} \\ dt(AEF) = \frac{1}{9} dt(ABC). \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

1) Tính  $\cos A$ .

2) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

### HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.** 1) Áp dụng định lí sin :

$$a = 2R \sin 60^\circ = R\sqrt{3}; c = 2R \sin 45^\circ = R\sqrt{2}.$$

Áp dụng định lí cosin :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow b^2 - (R\sqrt{2})b - R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{R}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) < 0 \text{ (loại)} \\ b = \frac{R}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

$$2) \sin B = \frac{b}{2R} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \sin 75^\circ = \sin 105^\circ.$$

**Bài 2.** 1) Ta có :  $\cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$  ;  $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^\circ$ .

Vậy  $C = 75^\circ$ .

$$2) h_a = c \sin B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} ; R = \frac{a}{2 \sin A} = \sqrt{2}.$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} + 1) ; r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}.$$

**Bài 3.** 1) Áp dụng định lí sin :  $bc = a^2 \Leftrightarrow \sin B \cdot \sin C = \sin^2 A$ .

$$2) \text{ Từ } S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bc \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{ah_a}{bc}.$$

Tính tương tự cho  $\sin B$  và  $\sin C$  và suy kết quả từ câu 1).

**Bài 4.** Áp dụng định lí trung tuyến tính  $m_b$  và  $m_c$  và chú ý  $m_a = \frac{a}{2}$  (do  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ).

**Bài 5.** Sử dụng công thức diện tích

$$dt(AMN) = dt(AMG) + dt(ANG) \Rightarrow 3xy = bx + cy. \quad (1)$$

$$4dt(AMN) = 3dt(ABC) \Rightarrow 4xy = 3bc. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) : } 4x^2 - 9cx + 3c^2 = 0 \Rightarrow x = \left( \frac{9 - \sqrt{33}}{8} \right) c \simeq \frac{2c}{5}.$$

**Bài 6.**  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} aR \Rightarrow bc = \frac{aR}{\sin A} = 2R^2 ;$

$$bc = 4R^2 \sin B \cdot \sin C. \text{ Suy ra đpcm.}$$

**Bài 7.** Gọi G là trọng tâm  $\triangle ABC$ .

$$\triangle GBC : a^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB \cdot GC \cos 120^\circ = 76.$$

$$\text{Suy ra : } a = 2\sqrt{19}.$$

$$36 = m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} ; 81 = m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 2c^2 - b^2 = -8 \\ 2b^2 - c^2 = 172 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4\sqrt{7} \\ c = 2\sqrt{13} \end{cases}$$

**Bài 8.** (ABC):  $BC = 2R \sin A = 2\sqrt{3}$

(IBC):  $BC = 2R' \sin \widehat{BIC} = 2R' \sin 120^\circ$

Suy ra:  $R' = \frac{2\sqrt{3}}{2 \sin 120^\circ} = 2$ .

**Bài 9.**  $AE = x, AF = y$ .

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{9}bc \\ \triangle AEC \sim \triangle AFB \Rightarrow xc = yb \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{3} \\ y = \frac{c}{3} \end{cases}$$

$$\cos A = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(ABC): R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{9}{2}$$

**Bài 10.** Gọi H là trung điểm cạnh BC và O là trung điểm của AH

$$\frac{3a^2}{2} = 2MA^2 + 2MH^2 + \frac{1}{2}BC^2 \Rightarrow OM = \frac{a}{4}$$

Tập hợp điểm M là đường tròn  $\left(O, \frac{a}{4}\right)$ .

## § 2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Phương tích một điểm đối với đường tròn

**a) Định nghĩa.** Cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R và một điểm M tùy ý. Phương tích của điểm M đối với (C), kí hiệu  $\mathcal{P}_{M/(C)}$ , là số thực  $OM^2 - R^2$ .

$$\mathcal{P}_{M/(C)} = d^2 - R^2 \quad (d = OM).$$

**b) Quan hệ giữa phương tích và đường tròn**

$$\mathcal{P}_{M/(C)} > 0 \Leftrightarrow M \text{ ở ngoài } (C).$$

$$\mathcal{P}_{M/(C)} < 0 \Leftrightarrow M \text{ ở trong } (C).$$

$$\mathcal{P}_{M/(C)} = 0 \Leftrightarrow M \in (C).$$

**c) Tính chất của cát tuyến**

Qua M, vẽ cát tuyến tùy ý MAB thì :

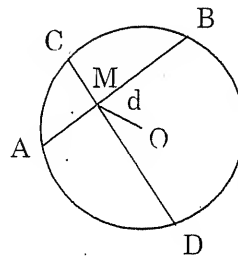
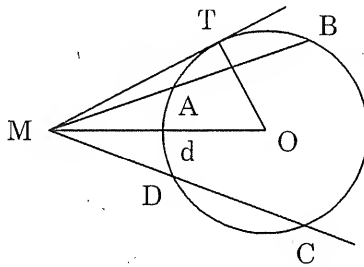
$$\mathcal{P}_{M/(C)} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}.$$

Nếu M ở ngoài (C). Kẻ tiếp tuyến MT cho (C) :

$$\mathcal{P}_{M/(C)} = MA \cdot MB = MT^2.$$

Nếu M ở trong (C) :

$$\mathcal{P}_{M/(C)} = - MA \cdot MB.$$



**2. Tứ giác nội tiếp đường tròn**

**a) Tứ giác nội tiếp.** Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi M là giao điểm của AB và CD.

$$ABCD \text{ nội tiếp đường tròn} \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}.$$

**b) Tiếp tuyến đường tròn.** Cho tam giác ABT. Phía ngoài đoạn thẳng AB lấy điểm M.

$$MT \text{ tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp } \triangle ABT \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = MT^2.$$

**3. Trục đẳng phương của hai đường tròn**

**a) Định nghĩa.** Cho hai đường tròn  $(O, R)$  và  $(O', R')$ . Trục đẳng phương của  $(O, R)$  và  $(O', R')$  là tập hợp những điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đó.

$$(\Delta) = \{M / \mathcal{P}_{M/(O)} = \mathcal{P}_{M/(O')}\}$$

**b) Định lí.** Trục đẳng phương của  $(O, R)$  và  $(O', R')$  là đường thẳng  $(\Delta)$  vuông góc với đường nối tâm  $OO'$  tại điểm  $H$  cách trung điểm  $I$  của  $OO'$  một đoạn  $IH$  được định bởi:

$$\overline{IH} = \frac{R^2 - R'^2}{2OO'}.$$

**c) Tính chất.**

- Trục đẳng phương vuông góc với đường nối tâm
- Khi  $(O, R)$  và  $(O', R')$  cắt nhau tại  $A, B$  thì trục đẳng phương là  $AB$ .
- Khi  $(O, R)$  và  $(O', R')$  tiếp xúc nhau thì tiếp tuyến chung đi qua tiếp điểm là trục đẳng phương.

## B. CÁC DẠNG TOÁN

### Dạng 1. TÍNH PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI ĐƯỜNG TRÒN

#### Phương pháp

- Sử dụng định nghĩa:  $\mathcal{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2$ .
- Sử dụng tính chất cát tuyến:  $\mathcal{P}_{M/(O)} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$ .  
Đặc biệt là tiếp tuyến:  $\mathcal{P}_{M/(O)} = MT^2$  ( $M$  ở ngoài  $(O)$ ).

**Ví dụ 1.** Cho hai đường tròn  $(O, R)$  và  $(O', R')$  cắt nhau tại  $A, B$  biết rằng  $OO' = 5a$ ,  $R = OA = 4a$  và  $AB = \frac{24}{5}a$ .

1) Tính  $\mathcal{P}_{O'/(O)}$  và  $\mathcal{P}_{O/(O')}$ .

2)  $OO' \cap AB = H$ . Chứng minh  $\mathcal{P}_{H/(O)} = \mathcal{P}_{H/(O')}$ .

#### Giải

$$1) \mathcal{P}_{O'/(O)} = OO'^2 - R^2 = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2.$$



$$\text{Do } HA = \frac{12}{5}a \Rightarrow OH = \frac{16}{5}a \text{ và } O'H = \frac{9}{5}a.$$

Vậy  $O'A = R' = 3a \Rightarrow \triangle OO'A$  vuông tại A.

$$\mathcal{P}_{O(O')} = OA^2 = 16a^2.$$

$$\text{b) } \mathcal{P}_{H(O)} = \mathcal{P}_{H(O')} = \overline{HA} \cdot \overline{HB} = -HA^2 = -\frac{144}{25}a^2.$$

**Ví dụ 2.** Cho  $AB = 2R$  là đường kính của đường tròn  $(O, R)$ . Gọi H là trung điểm của OA. Qua H dựng dây  $PQ \perp AB$  và I là trung điểm của HP. AI cắt  $(O)$  tại M. Tính IM.

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \mathcal{P}_{I(O)} &= IM \cdot IA = IP \cdot IQ, \text{ trong đó } IP = \frac{R\sqrt{3}}{4}, \\ IQ &= \frac{3R\sqrt{3}}{4}, IA = \frac{R\sqrt{7}}{4}. \text{ Suy ra : } IM = \frac{9R\sqrt{7}}{28}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 3.** Cho đường tròn đường kính  $AB = 2R$ . Hai dây cung tùy ý AM và BN gặp nhau tại H. Tính  $\mathcal{P}_{A/(BHM)} + \mathcal{P}_{B/(AHN)}$ .

**Giải**

Kẻ  $HE \perp AB \Rightarrow E \in (BHM)$  và  $E \in (AHN)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{A/(BHM)} + \mathcal{P}_{B/(AHN)} &= \overline{AE} \cdot \overline{AB} + \overline{BE} \cdot \overline{BA} = \overline{AB}(\overline{AE} + \overline{EB}) \\ &= AB^2 = 4R^2. \end{aligned}$$

## Dạng 2. CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP

### Phương pháp

$$A, B, C, D \text{ thuộc đường tròn} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \cap CD = M \\ \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}. \end{cases}$$

**Ví dụ 1.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của BH và J là trung điểm của AH. E là điểm đối

xung của A qua H. Chứng minh tứ giác IJCE nội tiếp.

**Giải**

Hệ thức lượng trong  $\triangle ABC$  vuông tại A, đường cao AH :

$$\begin{aligned} HA^2 &= -\overline{HB} \cdot \overline{HC} \Leftrightarrow 4HJ^2 = -2\overline{HI} \cdot \overline{HC} \\ &\Leftrightarrow -\overline{HE} \cdot \overline{HJ} = -\overline{HI} \cdot \overline{HC} \quad (\text{do } \overline{HE} = -2\overline{HJ}) \\ &\Leftrightarrow \overline{HE} \cdot \overline{HJ} = \overline{HI} \cdot \overline{HC}. \end{aligned}$$

Suy ra đpcm.

**Ví dụ 2.** Cho  $\triangle ABC$ , đường cao AH. Lấy điểm E tùy ý trên AH, đường tròn đường kính AE cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh BMNC nội tiếp.

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \widehat{BHE} &= \widehat{BME} = 90^\circ \Rightarrow \text{Tứ giác BMEH nội tiếp} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AE} \cdot \overline{AH} \\ \overline{AN} \cdot \overline{AC} = \overline{AE} \cdot \overline{AH}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự : } \overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AN} \cdot \overline{AC}.$$

Vậy BMNC nội tiếp.

**Ví dụ 3.** Gọi BE và CF là hai đường cao của  $\triangle ABC$ . M, N là trung điểm của AB và AC. Chứng minh MNEF nội tiếp.

**Giải**

$$\begin{aligned} BCEF \text{ nội tiếp} &\Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AF} = \overline{AC} \cdot \overline{AE} \Rightarrow 2\overline{AM} \cdot \overline{AF} = 2\overline{AN} \cdot \overline{AE} \\ &\Rightarrow \overline{AM} \cdot \overline{AF} = \overline{AN} \cdot \overline{AE}. \end{aligned}$$

Vậy MNEF nội tiếp.

### Dạng 3. CHỨNG MINH TIẾP TUYẾN

#### Phương pháp

$IA \text{ tiếp xúc với } (ABC) \text{ tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} I \in BC \text{ và ở ngoài đoạn } BC \\ IA^2 = \overline{IB} \cdot \overline{IC}. \end{cases}$
---

**Ví dụ 1.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Lấy điểm M tùy ý trên AB và ở ngoài hai đường tròn. Vẽ tiếp tuyến MD cho (O) và cát tuyến MEF cho (O'). Chứng minh MD tiếp xúc với đường tròn (DEF).

**Giải**

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_{M/(O)} &= MD^2 = \overline{MA} \cdot \overline{MB} \\ \mathcal{P}_{M/(O')} &= \overline{ME} \cdot \overline{MF} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow MD^2 = \overline{ME} \cdot \overline{MF}.$$

Vậy MD tiếp xúc với đường tròn (DEF) tại D.

**Ví dụ 2.** Cho đường tròn đường kính AB, MN là dây cung tùy ý. Đường tròn đường kính MB cắt AB tại C, đường thẳng CM cắt AN tại E. Chứng minh AM tiếp xúc với đường tròn (MNE).

**Giải**

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_{A/(MB)} &= AM^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} \\ \mathcal{P}_{A/(BCEN)} &= \overline{AE} \cdot \overline{AN} = \overline{AC} \cdot \overline{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AM^2 = \overline{AE} \cdot \overline{AN}.$$

Do đó AM tiếp xúc với (MNE) tại M.

**Ví dụ 3.** Cho đường tròn (O) ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Kẻ hai đường cao CE và BF của tam giác. Qua A kẻ  $(\Delta) \parallel EF$ ,  $(\Delta)$  cắt CB tại D. Chứng minh DA là tiếp tuyến của (O) tại A.

**Giải**

Ta có :

$$\left. \begin{aligned} \text{EFCB nội tiếp} &\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AEF} \\ (\Delta) \parallel EF &\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{AEF} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BAD}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \triangle ACD \sim \triangle BAD &\Rightarrow \frac{DC}{DA} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow DA^2 = DC \cdot DB \\ &\Rightarrow DA^2 = \overline{DC} \cdot \overline{DB}. \end{aligned}$$

Do đó DA tiếp xúc với đường tròn (ABC) tức là đường tròn (O).

#### Dạng 4. CHỨNG MINH MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC ĐOẠN THẲNG

**Ví dụ 1.** Gọi A, B là hai điểm trong đường tròn (O, R) sao cho  $\overline{AB} = \overline{R}$  và O là trung điểm của AB. Qua A, B vẽ hai tia song song, cùng hướng cắt (O) tại M, N. Chứng minh  $AM \cdot BN = \frac{3R^2}{4}$ .

**Giải**

NO gặp (O) tại E thì  $\triangle OBN = \triangle OAE$  (c.g.c)  $\Rightarrow$  M, A, E thẳng hàng và  $AE = BN$ .

$$\mathcal{P}_{A/(O)} = -AM \cdot AE = OA^2 - R^2 = -\frac{3R^2}{4} \Rightarrow AM \cdot BN = \frac{3R^2}{4}.$$

**Ví dụ 2.** Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. M là điểm tùy ý trên đường tròn. Kẻ  $MH \perp AB$ . Đường tròn (M, MH) cắt đường tròn (O) tại EF. Dây EF cắt MH tại I. Chứng minh  $IM = IH$ .

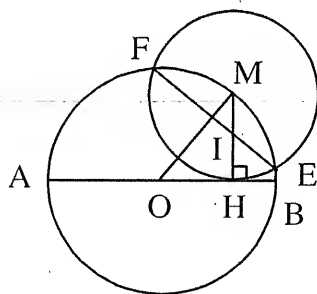
**Giải**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{I/(O)} &= \overline{IE} \cdot \overline{IF} = OI^2 - OM^2 \\ &= IH^2 + HO^2 - (MH^2 + HO^2) \\ &= IH^2 - MH^2. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathcal{P}_{I/(M)} = \overline{IE} \cdot \overline{IF} = IM^2 - MH^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$IH^2 = IM^2 \Rightarrow IH = IM.$$



**Ví dụ 3.** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ  $OC \perp \overline{AB}$  và Bx là nửa tiếp tuyến tại B. Cho M là điểm tùy ý trên cung phần tư  $\widehat{BC}$ . AM cắt OC tại N, cắt Bx tại E. Kẻ  $OH \perp AM$ . Chứng minh hai đường tròn (CNM) và (CHE) tiếp xúc nhau tại C.

## Giải

Tứ giác OBMN nội tiếp :  $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = 2R^2 = AC^2$ .

Vậy AC là tiếp tuyến với (CMN) tại C.

$\triangle ABE$  vuông tại B có đường cao BM :

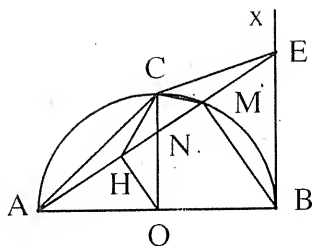
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE} = AB^2 = 4R^2 \Rightarrow 2AH \cdot \overrightarrow{AE} = 4R^2$$

(do H là trung điểm AM)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AE} = 2R^2 = AC^2.$$

Vậy AC là tiếp tuyến với (CHE) tại C.

Suy ra hai đường tròn (CNM) và (CHE) tiếp xúc tại C.



**Dạng 5. DÙNG PHƯƠNG TÍCH CHỨNG MINH ĐIỂM CỐ ĐỊNH. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM**

**Ví dụ 1.** Cho đường tròn  $(O, R)$  và điểm  $I$  cố định không nằm trên đường tròn. Gọi  $MN$  là đường kính di động của đường tròn. Chứng minh đường tròn  $(IMN)$  luôn luôn đi qua một điểm cố định.

## Giải

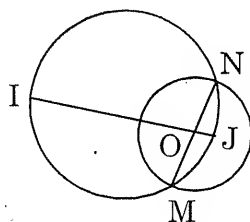
Đường tròn (IMN) cắt đường thẳng OI tại J.

$$\mathcal{P}_{O/(IMN)} = \overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -R^2.$$

Suy ra :  $\overrightarrow{OJ} = -\frac{R^2}{OI} = -\frac{R^2}{a}(OI = a).$

Điểm J nằm trên đường thẳng cố định OI  
và cách điểm O cố định đoạn  $\frac{R^2}{a}$  nên phải có

định.



**Ví dụ 2.** Cho đường tròn  $(O, R)$  và điểm  $A$  cố định cho bởi  $OA = \frac{R}{2}$ . Gọi  $BC$  là dây cung quay quanh  $A$ . Vẽ đường tròn đường kính  $BC$  và  $MN$  là dây cung vuông góc với  $BC$  tại  $A$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  và  $N$ .

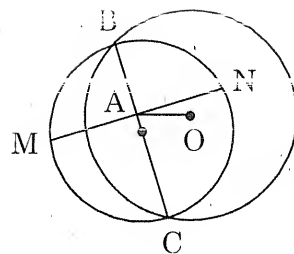
### Giải

$$\mathcal{P}_{A/(O)} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = OA^2 - R^2 = -\frac{3}{4}R^2. (1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{A/(BC)} &= AB \cdot AC = AM \cdot AN \\ &= -AM^2 = -AN^2. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2): } AM^2 = AN^2 = \frac{3R^2}{4}.$$

Tập hợp điểm M, N là đường tròn  $\left(A, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ .



**Ví dụ 3.** Cho A cố định ở trong (O, R) cho bởi  $OA = \frac{2R}{3}$ . M là điểm di động thuộc đường tròn. Đường thẳng vuông góc với AM kẻ từ O, gặp tiếp tuyến vẽ từ M tại N. Tìm tập hợp điểm N.

### Giải

Ta có AM cắt ON tại I. Qua N kẻ  $NB \perp OA$ . Tứ giác ABNI nội tiếp:

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}. \quad (1)$$

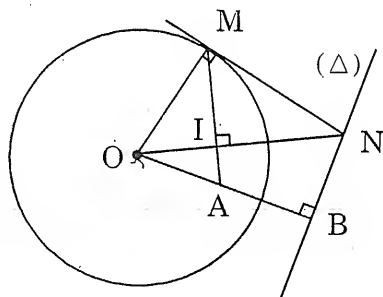
$\triangle OMN$  vuông tại M, đường cao

$$AI: \quad \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{ON} = OM^2 = R^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2):

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2 \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \frac{3R^2}{2R} = \frac{3R}{2}$$

(không đổi). Vậy B cố định. Tập hợp điểm N là đường thẳng  $(\Delta) \perp OA$  tại B mà  $OB = \frac{3R}{2}$ .



### Dạng 6. CÁC BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG

**Ví dụ 1.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm O. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt AC tại D, đường thẳng

vuông góc với AC tại C, cắt AB tại E. Gọi M, N là trung điểm của AE và AD. Chứng minh  $OA \perp MN$ .

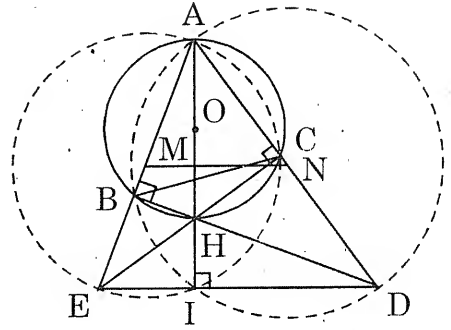
### ***Giải***

CE cắt BD tại H thì H là trực tâm của  $\triangle AED$  nên AH cắt ED tại I thì  $AI \perp ED$ .

Đường tròn (ACE) tâm M và đường tròn (ABD) tâm N đều qua I nên AI là trục đẳng phương của hai đường tròn đó. Vậy  $AI \perp MN$ .

Mặt khác, tứ giác ABHC nội tiếp đường tròn đường kính AH nên O là trung điểm của AH.

Vậy AO là trục đẳng phương của các đường tròn (ACIE) tâm M và (ABID) tâm N nên  $AO \perp MN$ .



**Ví dụ 2.** Cho  $\triangle ABC$  có các trung tuyến BE và CF. Gọi  $(\alpha)$  là đường tròn đường kính BE ;  $(\beta)$  là đường tròn đường kính CF.  $(\alpha)$  cắt  $(\beta)$  tại H, K. Chứng minh A, H, K thẳng hàng.

### ***Giải***

Do HK là trục đẳng phương của  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ . Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$A \in HK \Leftrightarrow \mathcal{P}_{A/(\alpha)} = \mathcal{P}_{A/(\beta)}.$$

Cách 1.  $\mathcal{P}_{A/(\alpha)} = \mathcal{P}_{A/(I)}$  với I là trung điểm của BM.

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AE} &= (\overline{AI} + \overline{IB})(\overline{AI} + \overline{IE}) = (\overline{AI} + \overline{IB})(\overline{AI} - \overline{IB}) \\ &= AI^2 - IB^2 = \mathcal{P}_{A/(I)}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy : } \mathcal{P}_{A/(I)} = \overline{AB} \cdot \overline{AE} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC}. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \mathcal{P}_{A/(J)} = \overline{AC} \cdot \overline{AF} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AB}. \quad (2)$$

(J là trung điểm của CF).

Từ (1) và (2) :  $\mathcal{P}_{A/(I)} = \mathcal{P}_{A/(J)}$ .

$$\begin{aligned} \text{Cách 2. } \mathcal{P}_{A/(\alpha)} &= AI^2 - IB^2 = \left( \frac{AB^2 + AE^2}{2} - \frac{BE^2}{4} \right) - \frac{BE^2}{4} \\ &= \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{8} - \frac{BE^2}{2} \\ &= \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{8} - \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \mathcal{P}_{A/(\beta)} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

**Ví dụ 3.** Cho hình thang vuông ABCD, đường cao CD. Gọi (C) là đường tròn (A, AC) ; (C') là đường tròn (B, BD). (C) và (C') gặp nhau tại E, F ; EF cắt DC tại I. Chứng minh IC = ID.

### Giải

$$\begin{aligned} I \in EF &\Leftrightarrow \mathcal{P}_{I/(C)} = \mathcal{P}_{I/(C')} \Leftrightarrow AI^2 - AC^2 = BI^2 - BD^2 \\ &\Leftrightarrow DI^2 - DC^2 = CI^2 - DC^2 \Leftrightarrow DI = CI. \end{aligned}$$

### C. BÀI TẬP

**Bài 1.** Hai dây cung AB và CD của đường tròn (O) cắt nhau tại E. Hãy tính EC và ED nếu cho biết : EA = 12, EB = 16 và CD = 32.

**Bài 2.** Cho đường tròn tâm O và I ở trong đường tròn đó. Qua I vẽ dây cung AB tùy ý và dây cung EF  $\perp$  OI. Tiếp tuyến với (O) tại E, F gặp nhau tại C. Chứng minh tứ giác OACB nội tiếp.

**Bài 3.** Cho đường tròn đường kính AB. Kẻ hai dây cung tùy ý AM, AN. Qua M kẻ MH  $\perp$  AB. MH cắt AN tại K.



a) Chứng minh AM tiếp xúc với hai đường tròn (MBH) và (MNK).

b) AM cắt BN tại C, AN cắt BM tại D và AB cắt CD tại E.  
Chứng minh :  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

**Bài 4.** Cho điểm I ở ngoài đường tròn (O, R) định bởi  $OI = 2R$ . Kẻ cát tuyến tùy ý IAB. Hai tiếp tuyến với (O) tại A, B gặp nhau tại M. Kẻ  $MH \perp OI$ . MH cắt AB tại N ; OM cắt AB tại E.

1) Tìm tập hợp điểm M khi IAB quay quanh I.

2) Chứng minh  $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IE}$ ,  $\overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{EI} = EA^2$ .

3) Hai đường tròn (NHA) và (NHB) tiếp xúc với (O).

4) Chứng minh :  $\overrightarrow{NH} \cdot \overrightarrow{NM} = HN^2 - \frac{3}{4}R^2$ .

**Bài 5.** Cho điểm A ở trong đường tròn (O, R) mà  $OA = \frac{3R}{4}$ . M là điểm tùy ý trên (O). Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OAM$  cắt tiếp tuyến của (O) tại M ở tại điểm N. Chứng minh trục đẳng phương của (O) và (OAM) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 6.** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn đó. Kẻ  $MH \perp AB$ . Đường tròn đường kính MH cắt MA, MB lần lượt tại E, F và cắt đường tròn (O) tại K. Chứng minh AB, EF, MK đồng quy.

**Bài 7.** Cho đường tròn (O, R). Từ điểm A ở ngoài (O) kẻ dây cung ABC và hai tiếp tuyến AE, AF với (O). EF cắt OA tại H và cắt BC tại M. Kẻ  $AN \perp OM$ .

1) Chứng minh OHBC nội tiếp.

2) Tính  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ .

**Bài 8.** Cho (O, R) và (O', R') cắt nhau tại A, B. AB cắt OO' tại I.

1) Qua I, kẻ đường thẳng ( $\Delta$ ) tùy ý, ( $\Delta$ ) cắt (O) tại M, N và cắt (O') tại P, Q. Chứng minh :  $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ}$ .

2) Trên AB, về phía ngoài hai đường tròn, lấy điểm J. JM cắt (O) tại E, JQ cắt (O') tại F.

a) Chứng minh MEFQ nội tiếp.

$$b) \overline{JM} \cdot \overline{JE} = \overline{JI}^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn (O, R) với góc A nhọn. Gọi I là trung điểm BC. Đường tròn (OAI) cắt BC tại D, cắt (O) tại F và AF cắt BC tại E.

1) Chứng minh :

$$a) \overline{EB} \cdot \overline{EC} = \overline{ED} \cdot \overline{EI}.$$

$$b) DA^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DC}.$$

2) Chứng minh DA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEI$ .

**Bài 10.** Cho đường tròn (O, R), đường kính AB. Từ điểm C ở ngoài (O) kẻ tiếp tuyến CT và kẻ  $CD \perp AB$  tại D. Đường thẳng qua T vuông góc với OC tại H, cắt AB tại M và CD tại N. Chứng minh :

$$1) \overline{MH} \cdot \overline{MN} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} ; \text{ kết luận.}$$

2) Chứng minh CT tiếp xúc với đường tròn (TND).

### LỜI GIẢI

**Bài 1.** Đặt  $EC = x$  và  $ED = y$ .

• E ở trong (O) :

$$\begin{cases} 0 < x < 32 \text{ và } 0 < y < 32 \\ x + y = 32 \\ xy = 192. \end{cases}$$

Vậy :

$$\begin{cases} EC = x = 8 \\ ED = y = 24 \\ EC = x = 24 \\ ED = y = 8. \end{cases}$$

• E ở ngoài (O) :

$$\begin{cases} 0 < x < 32 < y \\ y - x = 32 \\ xy = 192 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 32x - 192 = 0.$$

Vì :  $\left. \begin{matrix} P = -192 < 0 \\ S = -32 < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1 < x_2 < 0 \text{ (loại)}.$

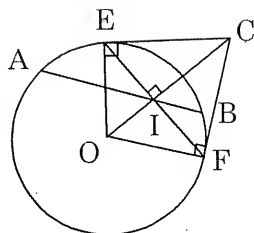
**Bài 2.**  $\mathcal{S}_{I/(O)} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IF} = -IE^2.$  (1)

$\Delta OEC : \overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IC} = -IE^2$  (2)

Từ (1) và (2) :

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IC}.$$

Vậy tứ giác OACB nội tiếp.



**Bài 3.** 1)  $\Delta AMB : AM^2 = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} : AM$  tiếp xúc (MHB) tại M.

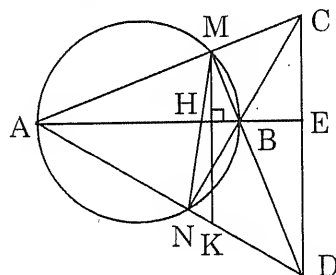
Tứ giác BHNK nội tiếp :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AK}.$$

Suy ra AM tiếp xúc (MNK) và (MBH) tại M.

2)  $\Delta ACD : B$  là trực tâm, suy ra  $AB \perp CD$  tại E.

Các tứ giác BMCE và BNDE nội tiếp cho ta :  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AD}.$



**Bài 4.** 1) Năm điểm M, A, H, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính OM (gọi là đường tròn (C)). AB là trục đẳng phương của (O) và (C). Do  $I \in AB$  nên :

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IO} = IO^2 - R^2 = 3R^2. \quad (1)$$

Do đó :  $\overrightarrow{IH} = \frac{3R^2}{2R} = \frac{3}{2}R$  (không đổi)  $\Rightarrow H$  cố định. Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta) \perp IO$  tại H (nằm ở ngoài đường tròn (O)).

2) Tứ giác OENH nội tiếp :  $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IO} = \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IE}.$  (2)

Từ (1) và (2) :  $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IE}.$

$$\Delta\text{AOM} : \text{EA}^2 = -\overrightarrow{\text{EO}} \cdot \overrightarrow{\text{EM}}. \quad (4)$$

$$3) \triangle AOM: \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MO} = MA^2. \quad (5)$$

Tứ giác OENH nội tiếp :

$$\overrightarrow{ME.MO} = \overrightarrow{MN.MH} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) :  $MA^2 = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MH}$ .

mà MA là tiếp tuyến với (O) tại A nên (ANH) và (O) cùng tiếp xúc với nhau tại A.

Tương tự (BNH) và (O) tiếp xúc với nhau tại B.

Kết luận (ANH) và (BNH) tiếp xúc với đường tròn (O).

$$4) \quad \overrightarrow{NH} \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = (\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IN})(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IN}) \\ = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + IN^2 - \overrightarrow{IN}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$$

$$= 3R^2 + IH^2 + HN^2 - 2\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IE}$$

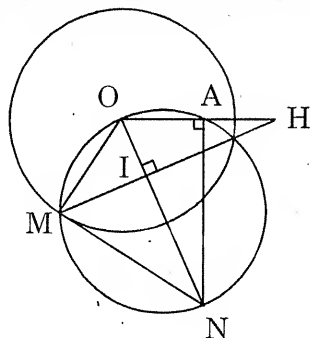
$$= 3R^2 + \frac{9}{4}R^2 - 2(3R^2) + HN^2 = HN^2 - \frac{3}{4}R^2.$$

**Bài 5.** Trong đường tròn (OAM) :  $\widehat{OAN} = 90^\circ$  do  $\widehat{OMN} = 90^\circ$ . Do đó tâm (AOM) là trung điểm đoạn ON. Vậy đường thẳng ( $\Delta$ ) qua M và ( $\Delta$ )  $\perp$  ON là trục đẳng phương của (O) và (OAM).

$(\Delta)$  cắt  $OA$  tại  $H$  :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{ON} = OM^2 = R^2.$$

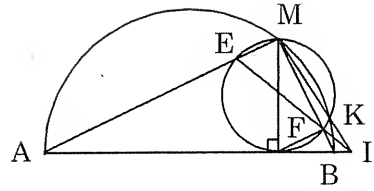
Suy ra  $\overline{OH} = \frac{4}{3}R$ . Vậy H cố định.



**Bài 6.** MEHK là hình chữ nhật.

$\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MA} = MH^2 = \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MB}$  nên ABFE nội tiếp. Cho EF cắt AB tại I.

$$\begin{aligned}
I \in EF &\Rightarrow \mathcal{P}_{I/(MH)} = \mathcal{P}_{I/(ABFE)} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{IE} \\
&\Rightarrow \mathcal{P}_{I/(O)} = \mathcal{P}_{I/(MH)}
\end{aligned}$$



Vậy I thuộc trục đẳng phương

MK của (O) và đường tròn đường kính MH hay AB, EF, MK đồng quy tại I.

**Bài 7.** 1) Ta có :  $\mathcal{P}_{A/(O)} = AE^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\Delta AEO : AE^2 = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AO}$$

Suy ra  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AO}$ .

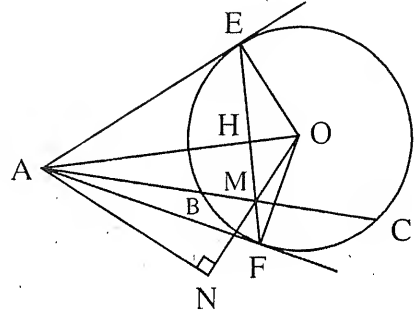
Vậy BCOH nội tiếp.

2) AHMN nội tiếp  $\Delta OAE$  :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} ;$$

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} = OE^2 = R^2.$$

Suy ra :  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = R^2$ .



**Bài 8.** 1) (O, R) :  $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$ .

(O', R') :  $\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$ .

Suy ra :  $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ}$ .

2) Tương tự :

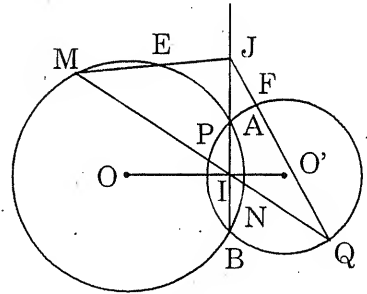
$$\overrightarrow{JE} \cdot \overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JF} \cdot \overrightarrow{JQ} (= \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JB}).$$

Vậy MEFQ nội tiếp.

Ta có :  $\overrightarrow{JE} \cdot \overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JB}$

$$= (\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{JI} - \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IB})$$

$$= JI^2 - IB^2 = JI^2 - IB^2 = JI^2 - \frac{1}{4}AB^2.$$



**Bài 9.** 1) a) AEF là trục đẳng phương của (O) và (OAI) nên :

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{P}_{E/(O)} &= \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} \\
\mathcal{P}_{E/(OAI)} &= \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF}
\end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EI}.$$

b) Do  $\widehat{DIO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAO} = 90^\circ$  ;  $\mathcal{P}_{D/(O)} = DA^2 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$ .

2) Ta có :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} &= (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DE})(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DE}) \\ &= \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + DE^2 - \overrightarrow{DE}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + DE^2 - 2\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DI}.\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EI} &= -\overrightarrow{DE}(\overrightarrow{DI} - \overrightarrow{DE}) \\ &= DE^2 - \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DI}.\end{aligned}\quad (2)$$

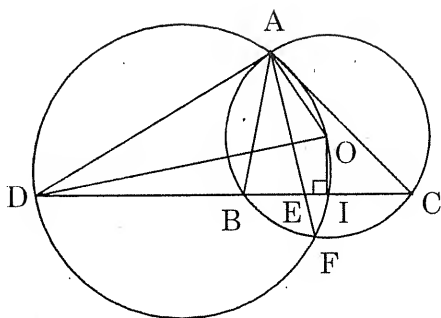
Từ câu 1a) và (1), (2) :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DI}.\quad (3)$$

Từ 1b) và (3) :

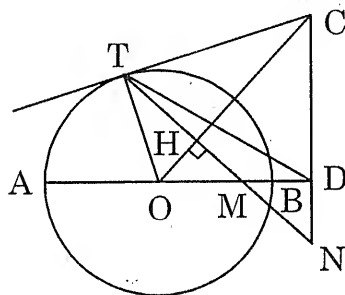
$$DA^2 = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DI}$$

Vậy DA tiếp xúc với (AEI) tại A.



**Bài 10.1)** Tứ giác OHDN nội tiếp :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MH} &= \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MD} \\ &= -\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM}) \\ &= OM^2 - \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OD} \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MH} &= OM^2 - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= OM^2 - OT^2 \\ &= \mathcal{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.\end{aligned}$$



Suy ra tứ giác ANBH nội tiếp.

2) Ta có :

$$\left. \begin{aligned}\text{ONDH nội tiếp : } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CN} &= \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CO} \\ \Delta OTC : \quad \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CO} &= CT^2\end{aligned} \right\} \Rightarrow CT^2 = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CN}.$$

Do đó CT tiếp xúc với đường tròn (NDT) tại T.

### D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 4. Kéo dài OA một đoạn AE = 2. Vẽ cát tuyến ECD. Tính EC, ED, AC, AD và BD nếu CD =  $2\sqrt{2}$ .

**Bài 2.** Cho đường tròn tâm O và đường thẳng  $(\Delta)$  không cắt (O). Trên  $(\Delta)$  lấy M tùy ý. Kẻ  $OA \perp (\Delta)$  và từ M kẻ hai tiếp tuyến ME, MF với (O), OM cắt EF tại N, OM cắt (O) tại H và K.

1) Chứng minh OE tiếp xúc với (EAB).

2) Chứng minh  $\overline{MH} \cdot \overline{MK} = \overline{MN} \cdot \overline{MO}$ .

3) Kẻ dây cung tùy ý CND. Chứng minh OCMD nội tiếp.

**Bài 3.** Cho đường tròn (O, R), đường kính AB cố định. Gọi  $(\Delta)$  là tiếp tuyến với (O) tại B. MN là đường kính di động. AM và AN cắt  $(\Delta)$  tại E và F.

1) Chứng minh MNFE nội tiếp.

2) Chứng minh đường tròn (AEF) đi qua một điểm cố định.

3) Gọi J là trung điểm EF, MN cắt  $(\Delta)$  tại I. Chứng minh :  $IA \perp OJ$ .

**Bài 4.** Cho đường tròn đường kính  $AOB = 2R$ . Gọi C là điểm đối xứng của O qua B.  $(\Delta)$  là đường thẳng vuông góc với AB tại C. Lấy M tùy ý trên  $(\Delta)$ , MA, MB cắt (O) tại E và F. EB cắt  $(\Delta)$  tại N.

1) Chứng minh A, F, N thẳng hàng.

2) Chứng minh đường tròn (MEFN) đi qua hai điểm cố định. Tính  $\mathcal{P}_{C/(MEFN)}$ .

3) Tìm tập hợp tâm các đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AMN$ .

4) EF cắt  $(\Delta)$  tại I, FC cắt AM tại J, EC cắt AN tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

**Bài 5.** Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, EF là dây cung vuông góc với AB tại trung điểm H của AO. Gọi M, N là hai điểm tùy ý trên cung lớn  $\widehat{EBF}$ . AM, AN cắt EF tại P và Q.

1) Chứng minh MNQP nội tiếp và AE tiếp xúc với hai đường tròn (EPM) và (EQN).

2) EF cắt MN tại I. Chứng minh :

$$\overline{IP} \cdot \overline{IQ} = \overline{IP} \cdot \overline{IQ} = IH^2 - \frac{3R^2}{4}$$

**Bài 6.** Cho đường tròn  $(O, R)$  và  $A$  ở trong  $(O)$  định bởi  $OA = \frac{3}{4}R$ .

Cho  $M$  tùy ý trên đường tròn. Tiếp tuyến tại  $M$  và đường thẳng qua  $O$ , vuông góc với  $AM$  gặp nhau tại  $N$ . Tìm tập hợp điểm  $N$ .

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , kẻ đường cao  $AH$  và đường tròn đường kính  $CH$ . Đường tròn tâm  $B$ , bán kính  $BA$  cắt đường tròn  $(CH)$  tại  $D$  và  $E$ . Chứng minh  $BE, BD$  tiếp xúc với đường tròn  $(CH)$ .

**Bài 8.** Cho đường tròn tâm  $O$  và dây cung  $AB$ . Gọi  $CD$  là đường kính vuông góc với  $AB$  tại  $H$ . Cho  $M$  là điểm tùy ý trên  $AB$ . Tiếp tuyến tại  $A$  cắt  $CD$  tại  $E$ . Kẻ  $EK \perp OM$ .

1) Chứng minh  $OA$  tiếp xúc với đường tròn  $(AMK)$  và  $OB$  tiếp xúc với đường tròn  $(BMK)$ .

2) Gọi  $I$  là trung điểm của  $OE$ . Chứng minh

$$OH^2 + OI^2 = HI^2 - OC^2.$$

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ . Gọi  $D$  là trung điểm của  $BC$ . Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OAD$  cắt  $BC$  tại  $E$  và cắt  $(O)$  tại  $M$ ,  $AM$  cắt  $BC$  tại  $F$ . Chứng minh  $EA$  tiếp xúc với  $(O)$  tại  $A$  và tiếp xúc với  $(DFA)$  cũng tại  $A$ .

**Bài 10.** Cho  $CD$  là đường kính của đường tròn  $(O, R)$ . Trên  $CD$  lấy hai điểm  $A, B$  mà  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = R^2$ . Chứng minh:

$$1) \mathcal{P}_{A/(O)} + \mathcal{P}_{B/(O)} = AB^2.$$

$$2) \frac{1}{\mathcal{P}_{A/(O)}} + \frac{1}{\mathcal{P}_{B/(O)}} = -\frac{1}{R^2}.$$



## HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.** Đáp số :  $EC = \sqrt{14} - \sqrt{2}$ ,  $ED = \sqrt{14} + \sqrt{2}$ ,  $AC = \sqrt{6 - 2\sqrt{7}}$ ,  
 $AD = \sqrt{6 + 2\sqrt{7}}$ ,  $BD = \sqrt{2}\sqrt{6 - \sqrt{7}}$ .

**Bài 2.** 1)  $OE^2 = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$ .

2)  $\mathcal{P}_{M/(O)} = ME^2 = \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK}$ ;  $\triangle OEM : ME^2 = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MO}$ . Từ đó suy ra đpcm.

3)  $\mathcal{P}_{N/(O)} = \overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{NM}$ .

**Bài 3.** 1)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AF} = 4R^2$ .

2) Qua điểm D đối xứng của A qua B.

3) Chứng minh AI là trục đẳng phương của (O) và (AEF).

**Bài 4.** 1)  $\widehat{AFN} = 180^\circ$ .

2)  $\mathcal{P}_{C/(MEFN)} = -3R^2$ . Hai điểm cố định U, V đối xứng qua C mà  $CU = CV = R\sqrt{3}$ .

3) Đường trung trực ( $\Delta$ ) của đoạn AL với  $CL = R$ .

4) I, J, K nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (AMN) và (CEF).

**Bài 5.** 1)  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = AE^2 = +R^2$

2)  $\mathcal{P}_{I/(MNPQ)}$ .

**Bài 6.** Tập hợp điểm N là đường thẳng ( $\Delta$ )  $\perp$  OA tại H mà  $OH = 4R/3$ .

**Bài 7.**  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BA^2 = BE^2 = BD^2$ .

**Bài 8.** 1)  $\mathcal{P}_{O/(MNEK)} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OE}$ ,  $\triangle OAE : OA^2 = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OE}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = OA^2 = OB^2$ , suy ra đpcm.

2)  $H \in AB$  là trục đẳng phương của (O) và đường tròn (I) tức là đường tròn qua năm điểm O, A, E, K, B nên  $\mathcal{P}_{H/(O)} = \mathcal{P}_{H/(I)}$ , suy ra đpcm.

**Bài 9.**  $\widehat{ODE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OAE} = 90^\circ$ : Đường tròn (O) nhận EA làm tiếp tuyến và  $EF \cdot ED = E \cdot EO = EA^2$  ( $EO \perp AM$  tại I), nên đường tròn (DFA) nhận EA làm tiếp tuyến.

**Bài 10.1)**  $\mathcal{P}_{A/(O)} = \mathcal{P}_{B/(O)} = OA^2 + OB^2 - 2R^2 = (\overline{OA} - \overline{OB})^2 = AB^2$

$$2) \frac{1}{\mathcal{P}_{A/(O)}} + \frac{1}{\mathcal{P}_{B/(O)}} = -\frac{1}{R^2}.$$

## ÔN TẬP CHƯƠNG II

### A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 1.** Nhận dạng tam giác ABC có các góc thỏa:

$$4 \sin^2 A - 4\sqrt{3} \sin A + 3 \tan^2 B - 2\sqrt{3} \tan B + 4 = 0.$$

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có hai trung tuyến BM và CN vuông góc nhau. Chứng minh:  $b^2 + c^2 = 5a^2$ .

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  có  $b^2 + c^2 = 2a^2$ . Chứng minh:

$$1) \cot A = \frac{a^2}{4S}$$

$$2) 2 \cot A = \cot B + \cot C.$$

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến AD. Qua trung điểm I của AD kẻ đường thẳng cắt AB, AC tại E và F sao cho  $dt(AEF) = \frac{1}{4} dt(ABC)$ .

$$1) \text{ Chứng minh } \frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = 1.$$

$$2) \text{ Tìm vị trí của EF nếu } dt(AEF)_{\max}.$$

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  cân có  $\widehat{BAC} = 20^\circ$ . Chứng minh  $a^3 + b^3 = 3ab^2$

**Bài 6.** Cho đường tròn (O, R) và điểm A cách tâm O đoạn  $OA = 3R$ . Gọi (C) là đường tròn tâm I thay đổi nhưng luôn

qua A sao cho (C) cắt (O) tại BC. Tiếp tuyến với (C) tại A gặp BC tại M. Tìm tập hợp điểm M.

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm O. Kẻ đường tròn tâm B, bán kính BA, đường tròn này cắt (O) tại D và cắt BC tại E và F, AD cắt BC tại M.

1) Chứng minh  $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

2) OB cắt (O) tại I và cắt (B) tại J, K và cắt AD tại Q. Chứng minh :  $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$ .

**Bài 8.** Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi I là một điểm ở trong (O), AI và BI cắt (O) tại M, N. Kẻ  $IH \perp AB$ .

1) a) Chứng minh AN, HI, BM đồng quy tại J.

b) HI cắt (O) tại K (K ở trong  $\triangle JAB$ ). Chứng minh AK tiếp xúc với đường tròn (KIM).

c) Tính  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ .

2) OI cắt (O) tại C. Giả sử  $IH = IC$ . Tiếp tuyến với (O) tại C cắt AB tại E. Chứng minh :  $EH^2 = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$ .

**Bài 9.** Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm C tùy ý trên đường tròn. Gọi (A) là đường tròn tâm A, bán kính AC. Đường tròn (A) cắt (O) tại K và cắt AB tại I và J, CK cắt AB tại H. Chứng minh :

1)  $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA}$ .

2)  $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{HB}$ .

3)  $IJ^2 = 8\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

**Bài 10.** Cho đường tròn tâm O và dây cung BC nhận M làm trung điểm. Gọi (O') là đường tròn đi qua O, M. (O') cắt (O) tại A, D và cắt BC tại E nằm ngoài (O). AD cắt BC tại F, AD cắt OE tại K.

1) Chứng minh OBCK nội tiếp.

2)  $EA^2 = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EM}$ .

3)  $EM^2 = EA^2 + \frac{1}{4}BC^2$ .

## HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.** Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$(2\sin A - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\tan B - 1)^2 = 0 \Rightarrow C = 90^\circ.$$

Tam giác vuông tại C.

**Bài 2.** Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\left(\frac{2}{3}BM\right)^2 + \left(\frac{2}{3}CN\right)^2 = BC^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2.$$

**Bài 3.** 1)  $\frac{a^2}{4S} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{bc \cos A}{2S} = \cot A.$

2) Áp dụng định lý côsin và sin :

$$\begin{aligned} 2\sin B \sin C \cos A = \sin^2 A &\Rightarrow 2\cot A = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\sin(B+C)}{\sin B \cdot \sin C} \\ &= \cot B + \cot C. \end{aligned}$$

**Bài 4.** 1)  $dt(AEF) = dt(AEI) + dt(AFI) \Leftrightarrow \frac{1}{4}S = \frac{AE}{2AB} \cdot \frac{S}{2}$   
 $= \frac{AF}{2AC} \cdot \frac{S}{2}$   
 $\Leftrightarrow 1 = \frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC}.$

2) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si :

$$\begin{aligned} 1 = \frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} &\geq 2\sqrt{\frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC}} \Rightarrow dt(AEF) \leq \frac{S}{4}. \\ dt(AEF)_{\max} = \frac{S}{4} &\Leftrightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Leftrightarrow EF \parallel BC. \end{aligned}$$

**Bài 5.** Kẻ phân giác BM ta có :  $MA = \frac{b^2}{a+b}, MC = \frac{ab}{a+b}.$

$$\triangle ABM : MB = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} MA = \frac{1}{2\cos 20^\circ} \cdot \frac{b^2}{a+b}. \quad (1)$$

$$\Delta CBM : MB = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} MC = 2 \cos 40^\circ \cdot \frac{ab}{a+b}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) :  $b = 4a \cos 40^\circ \cos 20^\circ = 2a(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)$ ,  
suy ra :  $\cos 20^\circ = \frac{b-a}{2a}. \quad (3)$

Định lí côsin :  $\cos 20^\circ = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}. \quad (4)$

Từ (3) và (4) :  $a^3 + b^3 = 3ab^2.$

**Bài 6.** Hướng dẫn :  $\mathcal{P}_{M/(O)} = \mathcal{P}_{M/(C)} \Rightarrow MO^2 - MA^2 = R^2$ . Tập hợp điểm M là  $(\Delta) \perp OA$  tại H cố định cho bởi  $JH = \frac{R}{6}$  (với J là trung điểm của OA).

**Bài 7.** 1) Từ  $\overline{ME} \cdot \overline{MF} = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$  suy ra :

$$(\overline{BE} - \overline{BM})(\overline{BF} - \overline{BM}) + \overline{BM}(\overline{BC} - \overline{BM}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE} \cdot \overline{BF} + \overline{BM} \cdot \overline{BC} = 0.$$

2)  $AD \perp JI$  và  $\widehat{BAI} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \overline{IK} \cdot \overline{IJ} = IA^2 \\ \overline{IQ} \cdot \overline{IB} = IA^2 \end{cases} \Rightarrow \text{đpcm.}$

**Bài 8.** 1) a) J là trực tâm  $\Delta IAB$ .

b)  $AK^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB} = \overline{AI} \cdot \overline{AM}.$

c)  $\overline{AI} \cdot \overline{AM} + \overline{BI} \cdot \overline{BN} = 4R^2.$

2) Gọi (I) là đường tròn tâm I, bán kính  $IH = IC$  thì (I) và (O) tiếp xúc nhau tại C và AB tiếp xúc (I) tại H, suy ra đpcm.

**Bài 9.** 1) Dùng  $\mathcal{P}_{B/(A)}$  và  $\Delta ABC$  vuông tại C có đường cao CH thì

$$\overline{BI} \cdot \overline{BJ} = \overline{BH} \cdot \overline{BA}. \quad (1)$$

2) Từ (1) suy ra :

$$\overline{BI} \cdot \overline{BJ} = (\overline{BJ} + \overline{JH})(\overline{BI} + \overline{IA}) \Leftrightarrow \overline{BH} \cdot \overline{IA} + \overline{JH} \cdot \overline{BI} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{IB} \cdot \overline{HJ} = \overline{IA} \cdot \overline{HB}.$$

3) Từ  $AC^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB} \Rightarrow IJ^2 = 8\overline{AC} \cdot \overline{AO}.$

- Bài 10.** 1) Do  $\angle OME = 90^\circ$  nên OE là đường kính của  $(O')$  và EA tiếp xúc với  $(O) \Rightarrow \overline{EB} \cdot \overline{EC} = \overline{EK} \cdot \overline{EO}$ .
- 2) Tứ giác OMFK nội tiếp, suy ra đpcm.
- 3) Từ  $EA^2 = \overline{AB} \cdot \overline{EC} = EM^2 = \frac{1}{4}BC^2$ , suy ra đpcm.

## B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 7, b = 8, c = 5$ . Số đo góc A là :  
 A)  $30^\circ$ . B)  $45^\circ$ .  
 C)  $60^\circ$ . D)  $120^\circ$ .
- Câu 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 8, b = 6, c = 4$ . Độ dài đường trung tuyến từ A là :  
 A) 10. B)  $\sqrt{10}$ .  
 C)  $2\sqrt{6}$ . D)  $\sqrt{6}$ .
- Câu 3.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 5, b = 8, S = 10$ . Số đo góc C là :  
 A)  $30^\circ$ . B)  $150^\circ$ .  
 C)  $120^\circ$ . D)  $30^\circ$  hoặc  $150^\circ$ .
- Câu 4.** Cho  $\triangle ABC$  có  $b = \sqrt{3}, c = \sqrt{2}, \cos A = -\sqrt{2}/2$ . Diện tích S bằng :  
 A)  $\sqrt{3}$ . B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .  
 C)  $\sqrt{6}$ . D)  $2\sqrt{3}$ .
- Câu 5.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ . Số đo góc A bằng :  
 A)  $120^\circ$ . B)  $60^\circ$ .  
 C)  $45^\circ$ . D)  $30^\circ$ .
- Câu 6.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 6, c = 4, m_b = \sqrt{10}$ , b có giá trị :  
 A) 8. B) 5.  
 C)  $2\sqrt{2}$ . D)  $4\sqrt{2}$ .

**Câu 7.** Các cạnh của  $\triangle ABC$  thỏa  $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$ . Giá trị góc

A là :

A)  $30^\circ$ .

B)  $45^\circ$ .

C)  $60^\circ$ .

D)  $120^\circ$ .

**Câu 8.** Cho  $\triangle ABC$ . Kết quả nào sau đây sai ?

A)  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .

B)  $S = \frac{abc}{4R}$ .

C)  $S = pr$ .

D)  $S = \sqrt{2p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

**Câu 9.** Cho  $\triangle ABC$ . Kết quả nào sau đây sai ?

A)  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .

B)  $a^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c}$ .

C)  $\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$ .

D)  $\cos A = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ .

**Câu 10.** Cho  $\triangle ABC$  câu nào sau đây sai ?

A)  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ .

B)  $a = 2R \sin A$ .

C)  $a = b + c \Rightarrow \sin A = \sin B + \sin C$ .

D)  $a^2 = bc \Rightarrow \cos^2 A = \cos B \cos C$ .

$\triangle ABC$  có ba cạnh  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2$  dùng cho các câu 11, 12, 13, 14, 15 và 16.

**Câu 11.** Tam giác ABC có tính chất :

A) vuông tại A.

B) vuông tại B.

C) vuông tại C

D) có 1 góc tù.

**Câu 12.** Diện tích S bằng :

A)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ .

B)  $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ .

C)  $3\sqrt{15}$ .

D)  $\sqrt{15}$ .

**Câu 13.** Giá trị của  $\sin A$  bằng :

A)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ .

B)  $\frac{\sqrt{15}}{2}$ .

C)  $\frac{1}{4}$ .

D)  $\frac{15}{4}$ .

**Câu 14.** Bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng :

A)  $8\sqrt{15}$ .

B)  $\frac{8}{15}$ .

C)  $\frac{8}{\sqrt{15}}$ .

D)  $\frac{\sqrt{15}}{8}$ .

**Câu 15.** Bán kính  $r$  của đường tròn nội tiếp tam giác bằng :

A)  $\frac{\sqrt{15}}{12}$ .

B)  $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ .

C)  $\frac{\sqrt{15}}{6}$ .

D)  $\frac{\sqrt{15}}{3}$ .

**Câu 16.** Xét bốn kết quả :

A)  $S = 3\sin A$ .

B) Góc  $A$  tù.

C)  $Rr = \frac{4}{3}$ .

D)  $\sin A < r$ .

Biết rằng trong đó có một kết quả sai. Hỏi câu nào sai ?

**Câu 17.** Các cạnh của  $\triangle ABC$  thỏa  $b^2 + c^2 < a^2$ . Phát biểu nào đúng ?

A)  $A < 90^\circ$ .

B)  $A > 90^\circ$ .

C)  $B > 90^\circ$ .

D)  $C > 90^\circ$ .

**Câu 18.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A = 3C$ ,  $B = 2C$  và chu vi  $2p = 3 + \sqrt{3}$ .  
Phát biểu nào sai ?

A)  $a = 2$ .

B)  $b = \sqrt{3}$ .

C)  $c = 1$ .

D)  $S = 2\sqrt{3}$ .

**Câu 19.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn bán kính  $R = 6$ .



Biết rằng chu vi tam giác  $2p = 13$ . Biểu thức  $\sin A + \sin B + \sin C$  có giá trị :

- A)  $\frac{13}{12}$ .                      B)  $\frac{13}{6}$ .  
C)  $\frac{12}{13}$ .                      D)  $\frac{6}{13}$ .

**Câu 20.**  $\triangle ABC$  có  $B = 60^\circ$ ,  $C = 45^\circ$ ,  $b = 3\sqrt{2}$ . Cạnh  $c$  có giá trị :

- A) 3.                      B)  $\sqrt{3}$ .  
C)  $2\sqrt{3}$ .                      D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 21.**  $\triangle ABC$  có  $b = 3\sqrt{2}$ ,  $c = 2\sqrt{3}$ , góc  $C = 45^\circ$ . Số đo của góc B là :

- A)  $90^\circ$ .                      B)  $60^\circ$ .  
C)  $45^\circ$ .                      D)  $30^\circ$ .

**Câu 22.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 5$ ,  $b = 4$ ,  $c = 3$ . Tích  $Rr$  có giá trị :

- A)  $\frac{5}{2}$ .                      B)  $\frac{2}{5}$ .  
C) 5.                      D) Kết quả khác.

**Câu 23.**  $\triangle ABC$  có  $A = 120^\circ$ ,  $b + c = 15$  ( $b > c$ ) và  $a = 13$ . Để tính  $b$  và  $c$ , một học sinh lập luận qua ba bước sau :

(I)  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ . Do  $A = 120^\circ$  nên  $cosA = -\frac{1}{2}$

suy ra :  $b^2 + c^2 + bc = a^2 = 169$ . (1)

(II) Vì  $b + c = 15 \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 225$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $bc = 56$ .

(III) Vậy  $b, c$  là hai nghiệm của phương trình

$$t^2 - 15t + 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 = c \\ t = 8 = b. \end{cases}$$

Chọn mệnh đề đúng ?

- A) Chỉ (I).                      B) Chỉ (II).  
C) Chỉ (III).                      D) Cả (I), (II), (III).

**Câu 24.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 13, b = 8, c = 7$ . Phát biểu nào sai ?

- A) Góc A tù.                      B)  $A = 135^\circ$ .  
C)  $\vec{a}\vec{b} = -28$ .                  D)  $S = 14\sqrt{3}$ .

**Câu 25.** Cho  $\triangle ABC$  có ba cạnh thỏa  $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a^2}{bc} = 1$  thì  $\widehat{A}$  có số đo là :

- A)  $30^\circ$ .                              B)  $45^\circ$ .  
C)  $60^\circ$ .                              D)  $90^\circ$ .

**Câu 26.** ABCD là hình bình hành có hai đường chéo  $AC = 4a$ ,  $BD = 2a$  và tạo thành góc  $60^\circ$ . Diện tích hình bình hành bằng :

- A)  $S = 4a^2\sqrt{3}$ .                  B)  $S = a^2\sqrt{3}$ .  
C)  $S = 2a^2\sqrt{3}$ .                  D)  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

**Câu 27.** Cho hình bình hành ABCD có  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AD = \sqrt{2}$ .  $AC^2 + BD^2$  có giá trị là :

- A) 10.                                  B) 5.  
C)  $\sqrt{6}$ .                                D) 6.

**Câu 28.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn, bán kính  $R = 1$ , biết góc  $C = 45^\circ$ , cạnh  $a = \sqrt{3}$ . Cạnh  $b$  có giá trị là :

- A)  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ .                              B)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ .

C) Cả 2 kết quả A và B. D) Kết quả khác.

**Câu 29.**  $\triangle ABC$  có góc  $A = 45^\circ$ , diện tích  $S$ , nội tiếp trong đường tròn bán kính  $R$ . Phát biểu nào đúng ?

- A)  $BC = R\sqrt{2}$ .  
B)  $2S = \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$ .  
C)  $AB^2 + AC^2 = 2R^2 + 4S$ .

D) Cả ba câu trên đều đúng.

**Câu 30.** Tam giác ABC có các cạnh và góc thỏa :

$$\begin{cases} a = 2b \cos C \\ \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2. \end{cases}$$

là tam giác :

- A) cân tại A.                      B)  $A = 60^\circ$ .  
C) Tam giác đều.                D) Cả ba câu trên.

**Câu 31.** Cho đường tròn  $(O, R)$ .  $\mathcal{P}_{O/(O)}$  là :

- A)  $-R^2$ .                              B)  $R^2$ .  
C) 0.                                    D) Kết quả khác.

**Câu 32.** Tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền  $BC = 2$  và nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi G là trọng tâm tam giác.  $\mathcal{P}_{G/(O)}$  là số :

- A)  $-9/8$ .                              B)  $-8/9$ .  
C)  $-1/3$ .                              D)  $-1/2$ .

**Câu 33.** Qua điểm A nằm trong đường tròn tâm O, kẻ dây cung MAN sao cho  $MN = 18$  và  $5AM = 4AN$ .  $\mathcal{P}_{A/(O)}$  là số :

- A)  $-18$ .                                B)  $-72$ .  
C)  $-80$ .                                D)  $-90$ .

**Câu 34.** Qua M ở ngoài đường tròn tâm O, kẻ cát tuyến MAB sao cho A chia đoạn MB theo tỉ  $-3$ . Cho biết  $MA = 3$ .  $\mathcal{P}_{M/(O)}$  là số :

- A)  $-12$ .                                B) 12.  
C) 16.                                    D)  $\frac{9}{16}$ .

**Câu 35.** Cho điểm A cách tâm O của đường tròn  $(O, R)$  một đoạn  $OA = 2R$ . Qua A, kẻ tiếp tuyến AT. OT cắt đường tròn tại F, AF cắt đường tròn tại E. Phát biểu nào sai ?

- A)  $\mathcal{P}_{A/(O)} = 3R^2$ .                B)  $AE = \frac{R\sqrt{7}}{7}$ .  
C)  $AF = R\sqrt{7}$ .                    D)  $AE \cdot AF = 3R^2$ .

**Câu 36.** Tam giác ABC đều nội tiếp trong đường tròn (O, R). Gọi H là trung điểm cạnh BC. Phát biểu nào sai ?

- A)  $\mathcal{P}_{O/(ABC)} = -R^2$ .      B)  $\mathcal{P}_{A/(O)} = 0$ .  
 C)  $\mathcal{P}_{H/(O)} = -\frac{3}{4}R^2$ .      D)  $\mathcal{P}_{H/(O)} = \frac{1}{2}(\mathcal{P}_{B/(O)} + \mathcal{P}_{C/(O)})$ .

**Câu 37.** A là một điểm tùy ý đối với đường tròn (O, R). Phát biểu nào sai ? Qua A, kẻ cát tuyến AMN.

- A)  $\mathcal{P}_{A/(O)} = OA^2 - R^2$ .      B)  $\mathcal{P}_{A/(O)} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$ .  
 C)  $\mathcal{P}_{A/(O)} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$ .      D)  $\mathcal{P}_{A/(O)} = AM \cdot AN$ .

Giả thiết sau dùng cho hai câu 38 và 39 : Từ A ở trong đường tròn tâm O, bán kính  $R = 24$ , kẻ dây cung MN sao cho  $MN = 36$  và  $5AM = 4AN$ .

**Câu 38.**  $\mathcal{P}_{A/(O)}$  bằng :

- A)  $-320$ .      B)  $-280$ .  
 C)  $-540$ .      D) Kết quả khác.

**Câu 39.** Khoảng cách OA là :

- A) 12.      B) 13.  
 C) 16.      D) 20.

**Câu 40.** ABCD là hình thang cân,  $AD \parallel BC$  và  $AD = 2BC = 2R$ , nội tiếp trong đường tròn (O, R). Kẻ  $BH \perp AD$  thì  $\mathcal{P}_{H/(O)}$  bằng :

- A)  $-\frac{R^2}{2}$ .      B)  $-\frac{3}{4}R^2$ .  
 C)  $-\frac{4}{3}R^2$ .      D)  $-4R^2$ .

**Câu 41.** ABCD là hình bình hành tâm O, cạnh  $AB = 5$ , cạnh  $AD = 13$  và đường chéo  $BD = 12$ . Phát biểu nào đúng ?

- A) Trung tuyến BE của  $\triangle ABD$  dài  $\frac{13}{2}$ .  
 B)  $\overline{BA} \cdot \overline{BD} = 0$ .

C)  $\mathcal{S}_{O/(ABD)} = -36$ .

D) Cả ba câu trên.

**Câu 42.** Cho  $\triangle ABC$  đều, cạnh  $a$ , nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ .  $OA$  cắt  $BC$  tại  $H$ . Qua  $H$  kẻ dây cung  $MHN$  sao cho  $HM = 2HN$  thì  $HM$  có giá trị bằng :

A)  $a\sqrt{2}$ .

B)  $2a\sqrt{2}$ .

C)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

D)  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ .

**Câu 43.** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ . Hai đường cao  $BB'$  và  $CC'$  cắt nhau tại  $H$ .  $AH$  cắt  $BC$  tại  $A'$  và đường tròn  $(O)$  tại  $D$ . Phát biểu nào sai ?

A)  $\overline{AC'} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{AA'}$ . B)  $\overline{AH} \cdot \overline{AA'} = \overline{AB'} \cdot \overline{AC}$ .

C)  $\overline{AC'} \cdot \overline{AB} = \overline{AB'} \cdot \overline{AC}$ . D)  $\overline{AH} \cdot \overline{AA'} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ .

**Câu 44.** Giả thiết như câu 43. Phát biểu nào đúng ?

A)  $\overline{A'B} \cdot \overline{A'C} = \overline{A'A} \cdot \overline{A'D}$ . B)  $\overline{A'B} \cdot \overline{A'C} = -\overline{A'H} \cdot \overline{A'A}$ .

C)  $\overline{A'H} + \overline{A'D} = 0$ . D) Cả ba câu đều đúng.

**Câu 45.** Cho  $\triangle ABC$ . Hai đường cao  $BE$  và  $CF$  gặp nhau tại  $H$ .  $EF$  cắt  $CB$  kéo dài tại  $I$ . Phát biểu nào đúng ?

A)  $IA^2 = IE \cdot IF$ . B)  $IH^2 = IE \cdot IF$ .

C)  $IE \cdot IF = IB \cdot IC$ . D)  $IA^2 = IB \cdot IC$ .

**Câu 46.** Cho hai đường tròn  $(O)$ ,  $(O')$  tiếp xúc ngoài tại  $I$ . Vẽ hai tiếp tuyến chung ngoài  $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$  và tiếp tuyến chung trong  $(\Delta_3)$ . Trục đẳng phương của  $(O)$  và  $(O')$  là :

A)  $(\Delta_1)$ .

B)  $(\Delta_2)$ .

C)  $(\Delta_3)$ .

D)  $OO'$ .

**Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Ba đường cao  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  cắt nhau tại  $H$ . Phát biểu nào sai ?

A)  $(AC'HB')$  và  $(BC'HA')$  có trục đẳng phương là  $CH$ .

B)  $(AC'HB')$  và  $(CB'HA')$  có trục đẳng phương là  $BH$ .

C)  $(AC'HB')$  và  $(ABC)$  có trục đẳng phương là  $AH$ .

D) Điểm  $H$  có cùng phương tích đối với ba đường tròn  $(AC'HB')$ ,  $(BC'HA')$ ,  $(CB'HA')$ .

**Câu 48.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $DC$ ,  $AM$  cắt  $BC$  kéo dài tại  $N$ . Phát biểu nào đúng?

A)  $DO$  tiếp xúc với  $(OMC)$  tại  $O$ .

B)  $DN$  tiếp xúc với  $(NMC)$  tại  $N$ .

C) Tứ giác  $OMNB$  nội tiếp.

D) Tứ giác  $OMDA$  không nội tiếp được.

**Câu 49.** Gọi  $AB$  và  $CD$  là hai đường kính vuông góc của đường tròn tâm  $O$ . Lấy  $M$  tùy ý trên cung phần tư  $\widehat{BC}$ .  $AM$  cắt  $CD$  tại  $N$ . Phát biểu nào sai?

A) Tích  $AN \cdot AM$  không thay đổi.

B)  $AC$  tiếp xúc với  $(CNM)$  tại  $C$ .

C)  $DM$  tiếp xúc với  $(MCN)$  tại  $M$ .

D)  $NA \cdot NM = NC \cdot ND$ .

**Câu 50.** Gọi  $(\Delta)$  là tiếp tuyến tại đầu  $B$  của đường kính  $AB$  của đường tròn tâm  $O$ .  $MON$  là đường kính tùy ý.  $AM$  và  $AN$  cắt  $(\Delta)$  tại  $E$  và  $F$ . Phát biểu nào sai?

A)  $AM \cdot AE = AN \cdot AF$ .

B)  $AB$  là trục đẳng phương của  $(O)$  và  $(AEF)$ .

C)  $\mathcal{P}_{B/(AEF)}^2 = -4R^2$ .

D)  $\mathcal{P}_{O/(AEF)}^2 = -\frac{3}{2}R^2$ .

### GIẢI THÍCH - HƯỚNG DẪN

**Câu 1.**  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$ . Câu C).

**Câu 2.**  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 10 \Rightarrow m_a = \sqrt{10}$ . Câu B).

**Câu 3.**  $S = \frac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow \sin C = \frac{2S}{ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} C = 30^\circ \\ C = 150^\circ \end{cases}$  Câu D).

**Câu 4.**  $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 135^\circ \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .  
 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Câu B).

**Câu 5.**  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$ .  
 Câu A).

**Câu 6.**  $m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \Rightarrow b^2 = 2(c^2 + a^2) - 4m_b^2$   
 $= 104 - 40 = 64 \Rightarrow b = 8$ . Câu A).

**Câu 7.** Yêu cầu bài toán tương đương :  
 $b^3 + c^3 - a^3 = a^2(b + c - a) \Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2b + a^2c$   
 $\Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b + c)$   
 $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$  (do  $b + c \neq 0$ )  
 $\Leftrightarrow bc = b^2 + c^2 - a^2$   
 $\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} = \cos A \Leftrightarrow A = 60^\circ$ . Câu C).

**Câu 8.**  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ . Câu D).

**Câu 9.**  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ . Câu C).

**Câu 10.**  $a^2 = bc \Leftrightarrow 4R^2 \sin^2 A = 4R^2 \sin B \sin C$   
 $\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin B \sin C$ . (1)

Nếu có  $\cos^2 A = \cos B \cos C$ . (2)

Lấy (2) - (1) vế theo vế :

$$\cos^2 A - \sin^2 A = \cos B \cos C - \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A = \cos(B + C) = -\cos A$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 A + \cos A - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = -1 \\ \cos A = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 180^\circ \text{ (loại)} \\ A = 60^\circ. \end{cases} \text{ Câu D).}$$

**Câu 11.**  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow A$  tù. Câu D).

**Câu 12.**  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ . Câu B).

**Câu 13.**  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{4}$  ;

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{15}}{4} > 0. \text{ Câu A).}$$

**Câu 14.**  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$  ;  $R = \frac{abc}{4S} = \frac{8}{\sqrt{15}}$ .

Câu C).

**Câu 15.**  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$  ;  $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{15}}{6}$ . Câu C).

**Câu 16.** Ta có :  $\begin{cases} S = \frac{1}{2}bc \sin A \\ S = pr \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{2S}{bc} \\ r = \frac{S}{p} ; \end{cases}$

$$\sin A < r \Leftrightarrow \frac{2S}{bc} < \frac{S}{p} \Leftrightarrow 2p < bc. \text{ Vậy } \sin A < r \text{ là sai.}$$

Câu D).

**Câu 17.**  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0 \Rightarrow A$  tù. Câu B).

**Câu 18.** Vì  $A = 3C$  và  $B = 2C \Rightarrow C = 30^\circ, B = 60^\circ, A = 90^\circ$ . Suy ra :

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2} = \frac{2p}{3 + \sqrt{3}} = 2.$$

Vậy :  $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$ . Câu D).



**Câu 19.**  $2p = a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ . Suy ra :

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{2p}{2R} = \frac{13}{12}. \text{ Câu A).}$$

**Câu 20.**  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{b \sin C}{\sin B} = 2\sqrt{3}$ . Câu C).

**Câu 21.**  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{b}{c} \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = 60^\circ$ . Câu B).

**Câu 22.** Ta có : 
$$\begin{cases} S = \frac{abc}{4R} \\ S = pr \end{cases} \Rightarrow Rr = \frac{abc}{4p} = \frac{5}{2}. \text{ Câu A).}$$

**Câu 23.** Câu D).

**Câu 24.**  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$ . Câu B).

**Câu 25.**  $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a^2}{bc} = 1 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ.$$

Câu C).

**Câu 26.** Gọi O là tâm hình bình hành.

$$S = 4dt(OAB) = 4 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin 60^\circ$$

$$= 2(2a)(a) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2a^2 \sqrt{3}. \text{ Câu B).}$$

**Câu 27.** Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

$$\triangle ABD: AB^2 + AD^2 = 2OA^2 + \frac{1}{2} BD^2$$

$$= \frac{4OA^2 + BD^2}{2} = \frac{AC^2 + BD^2}{2}.$$

Suy ra :  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2) = 10$ . Câu A).

**Câu 28.**  $\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow c = 2(1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Leftrightarrow b^2 - 2a \cos C(b) + a^2 - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - \sqrt{6}b + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \\ b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

vì  $\sin B = \frac{b}{2R} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} > 1$ . Vậy  $b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ . Câu A).

**Câu 29.** 1)  $2S = AB \cdot AC \sin A$

$$= AB \cdot AC \cos A \text{ (vì } A = 45^\circ \Rightarrow \cos A = \sin A)$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

2)  $BC = 2R \sin A = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}.$

3)  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AB \cdot AC \cos A$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \sin A = AB^2 + AC^2 - 4S$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 + 4S = 2R^2 + 4S. \text{ Câu D).}$$

**Câu 30.** •  $a = 2b \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow b = c.$

$\triangle ABC$  cân tại A.

•  $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2b + a^2c$

$$\Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 = a^2 \text{ (do } b + c \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc.$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ.$$

$\triangle ABC$  đều. Câu D).

**Câu 31.**  $\mathcal{P}_{O/(O)} = OO^2 - R^2 = -R^2$ . Câu A).

**Câu 32.**  $OG = \frac{1}{3}OA = \frac{1}{3}$  và  $R = OA = 1$ , suy ra :

$$\mathcal{P}_{G/(O)} = \frac{1}{9} - 1 = \frac{-8}{9}. \text{ Câu B).}$$

**Câu 33.** Do  $A \in MN$  nên  $\frac{AM}{4} = \frac{AN}{5} = \frac{AM + AN}{9} = \frac{18}{9} = 2.$

$$\begin{cases} AM = 8 \\ AN = 10 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{P}_{A/(O)} = -AM \cdot AN = -80. \text{ Câu C).}$$

**Câu 34.** Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\overline{AM} = -3\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AM} + 3\overline{AB} = 0 \Rightarrow 3\overline{MB} = 4\overline{MA}$$

$$\mathcal{P}_{M/(O)} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = MA \left( \frac{4}{3} MA \right) = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12. \text{ Câu B).}$$

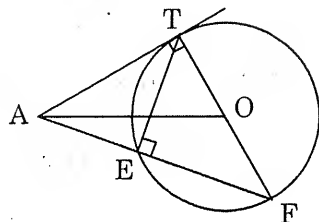
**Câu 35.**  $\mathcal{P}_{A/(O)} = AT^2 = OA^2 - R^2 = 3R^2.$

$$AF^2 = AT^2 + TF^2$$

$$= 3R^2 + 4R^2 = 7R^2.$$

$$AE \cdot AF = 3R^2 \Rightarrow AE = \frac{3R^2}{R\sqrt{7}}$$

$$= \frac{3R\sqrt{7}}{7}. \text{ Câu B).}$$



**Câu 36.**  $\mathcal{P}_{B/(O)} + \mathcal{P}_{C/(O)} = 0$  mà  $\mathcal{P}_{H/(O)} = OH^2 - R^2 = -\frac{3}{4}R^2.$

Câu D).

**Câu 37.** A ở ngoài (O, R) :  $\mathcal{P}_{A/(O)} = AM \cdot AN > 0.$

A ở trong (O, R) :  $\mathcal{P}_{A/(O)} = -AM \cdot AN < 0. \text{ Câu D).}$

**Câu 38.**  $\frac{AM}{4} = \frac{AN}{5} = \frac{MN}{9} = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow \begin{cases} AM = 16 \\ AN = 20. \end{cases}$

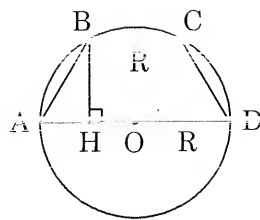
Vậy  $\mathcal{P}_{A/(O)} = -AM \cdot AN = -320. \text{ Câu A).}$

**Câu 39.** Ta có :  $\begin{cases} \mathcal{P}_{A/(O)} = -320 \\ R = 24 \end{cases} \Rightarrow OA^2 = R^2 + \mathcal{P}_{A/(O)} = 256.$

Suy ra  $OA = 16. \text{ Câu C).}$

**Câu 40.**  $\mathcal{P}_{H/(O)} = -HA \cdot HD = -\frac{R(3R)}{2(2)}$   

$$= -\frac{3}{4}R^2 \quad \text{Câu B)}$$



**Câu 41.**  $\triangle BAD: m_B^2 = \frac{BA^2 + BD^2}{2} - \frac{AD^2}{4}$   

$$= \frac{25 + 144}{2} - \frac{169}{4} = \frac{169}{4}$$

Suy ra:  $m_B = BE = \frac{13}{2} = \frac{AD}{2}$ . Câu A), B) đúng.

$\mathcal{P}_{O/(ABD)} = OE^2 - EB^2 = \frac{25}{4} - \frac{169}{4} = -36$ . Câu D).

**Câu 42.**  $\mathcal{P}_{H/(O)} = -HM \cdot HN = -a^2$ , suy ra:

$$HM = \frac{a^2}{HN} = \frac{2a^2}{HM} \Leftrightarrow HM^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow HM = a\sqrt{2}.$$

Câu A).

**Câu 43.**  $\overline{AH \cdot AA'} = \overline{AB \cdot AC}$ . Câu D).

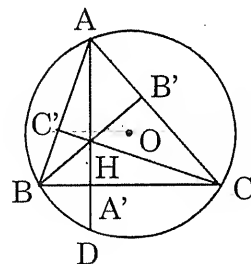
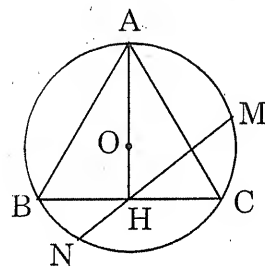
$\overline{AH \cdot AA'} = \overline{AB' \cdot AC}$  ( $HA'CB'$  nội tiếp).

Suy ra  $\overline{AB} = \overline{AB'}$  (sai). Vậy câu D).

**Câu 44.** A) đúng do  $\mathcal{P}_{A'/(O)}$ .

B) đúng do  $\triangle A'BH \sim \triangle A'AC$ .

C) đúng do suy từ A) và B). Vậy chọn câu D).



**Câu 45.** Câu C) đúng do tứ giác BCEF nội tiếp.

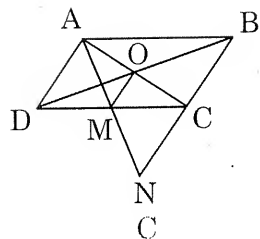
**Câu 46.**  $(\Delta_3)$ . Câu C) đúng.

**Câu 47.** Câu C) sai vì trong tam giác ABC tùy ý, đường cao AH không phải luôn luôn vuông góc với OH. Câu C).

**Câu 48.** Câu D) đúng, vì nếu (OMDA) nội tiếp thì:

$$CO \cdot CA = CM \cdot CD \Rightarrow CA^2 = CD^2 \Rightarrow CA = CD.$$

Hình bình hành ABCD không còn tùy ý. Câu D).



**Câu 49.** Kẻ  $MH \perp CD$ .

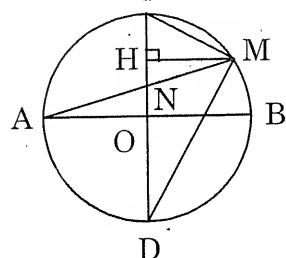
$$\triangle MCD : DM^2 = \overline{DC} \cdot \overline{DH}. \quad (1)$$

Nếu câu C) đúng thì :

$$DM^2 = \overline{DC} \cdot \overline{DN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) :

$$\overline{DN} = \overline{DH} \Leftrightarrow N \equiv H \text{ (sai). Câu D).}$$



**Câu 50.** Câu B) sai, vì gọi I là trung điểm của EF thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$ . Vì AB không vuông góc với OI nên AB không phải là trục đẳng phương của (O) và (AEF). Câu B).

## ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1	C	11	D	21	B	31	A	41	D
2	B	12	B	22	A	32	B	42	A
3	D	13	A	23	D	33	C	43	D
4	B	14	C	24	B	34	B	44	D
5	A	15	C	25	C	35	B	45	C
6	A	16	D	26	B	36	D	46	C
7	C	17	B	27	A	37	D	47	C
8	D	18	D	28	A	38	A	48	D
9	C	19	A	29	D	39	C	49	D
10	D	20	C	30	D	40	B	50	B

## PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

### § 1. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

#### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Tọa độ của điểm và của vector

##### a) Hệ trục trong tọa độ

- Kí hiệu  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  với  $O$  là giao điểm của  $Ox, Oy$  ;  
 $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ .

##### b) Tọa độ một điểm

- Cho điểm  $M$  tùy ý trong mặt phẳng  $Oxy$ . Cặp số  $(x; y)$  gọi là tọa độ của điểm  $M$ , kí hiệu  $M(x; y)$  nếu  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ .

$$M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

##### c) Tọa độ một vector

- Cho vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ :

$$\vec{u} = (u_1; u_2) \Leftrightarrow \vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$$

##### d) Hai vector bằng nhau

- Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$  :

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2. \end{cases} \quad (1)$$

**e) Quan hệ giữa tọa độ vector và hai đầu mút**

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \quad (2)$$

## 2. Các phép tính vector

### a) Công thức

Cho hai vector  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  và số  $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 + b_1; a_2 + b_2). \\ \bullet \vec{a} - \vec{b} &= (a_1 - b_1; a_2 - b_2). \\ \bullet k\vec{a} &= (ka_1; ka_2). \\ \bullet \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2. \end{aligned} \quad (3)$$

### b) Hệ quả

$$\begin{aligned} \bullet \vec{a} // \vec{b} &\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \\ \bullet \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

### c) Các kết quả khác

• Độ dài một vector :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (5)$$

• Khoảng cách giữa hai điểm :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (6)$$

• Góc giữa hai vector :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad (7)$$

- Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng : Gọi M là trung điểm đoạn AB :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad (8)$$

## B. CÁC DẠNG TOÁN

### Dạng 1. XÁC ĐỊNH MỘT ĐIỂM

#### Phương pháp

Qua các công thức về tọa độ (1 → 8), biểu diễn các tính chất hình học liên quan đến điểm khảo sát dưới dạng hệ phương trình có chứa 2 ẩn x, y. Giải hệ phương trình này cho ta tọa độ điểm muốn tìm.

**Ví dụ 1.** Cho hai điểm A(-3; 3) và B(4; 4).

- Tìm điểm  $M \in Oy$  để  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ .
- Tìm điểm  $N \in Ox$  để A, B, N thẳng hàng.

#### Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } M(0; y) \in Oy &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (3)(-4) + (y-3)(y-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $M_1 \equiv O$  và  $M_2(0; 7)$ .

b)  $N(x; 0) \in Ox$ .

Để A, N, B thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \parallel \overrightarrow{AB}$



$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{7} = \frac{-3}{1} \Leftrightarrow x = -24.$$

Vậy  $N(-24; 0)$ .

**Ví dụ 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(0; 5)$ ,  $B(-2; -1)$ ,  $C(4; 2)$ . Xác định chân đường cao  $AH$  của  $\triangle ABC$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} H(x; y) \text{ là chân đường cao } \triangle ABC &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \overline{BH} \parallel \overline{AC} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3(y - 5) = 0 \\ \frac{x + 2}{6} = \frac{y + 1}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $H(2; 1)$ .

**Ví dụ 3.** Cho  $A(2; 4)$ ,  $B(-1; 0)$ ,  $C(10; -2)$ . Xác định điểm  $M$  và  $N$  là chân các đường phân giác trong và ngoài  $\widehat{BAC}$  của  $\triangle ABC$ .

**Giải**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB^2 = 9 + 16 = 25 \\ AC^2 = 64 + 36 = 100 \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}.$$

$M(x; y)$  là chân đường phân giác trong góc  $A$  khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} &= -\frac{AB}{AC} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-1 - x) + (10 - x) = 0 \\ 2(0 - y) + (-2 - y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/3 \\ y = -2/3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $M(8/3; -2/3)$ .

$N(x; y)$  là chân đường phân giác ngoài góc A khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow N(-12; 2).$$

## Dạng 2. CHỨNG MINH MỘT TÍNH CHẤT CỦA MỘT HÌNH

**Ví dụ 1.** Cho  $A(-3; -2)$ ,  $B(3; 6)$ ,  $C(11; 0)$ ,  $D(5; -8)$ . Chứng minh ABCD là hình vuông.

**Giải**

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (6; 8) \\ \overline{DC} = (6; 8) \\ \overline{AD} = (8; -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{DC} \\ \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0 \\ AB = AD \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{ABCD là hình vuông.}$$

**Ví dụ 2.** Cho bốn điểm  $A(-3; -2)$ ,  $B(3; 6)$ ,  $C(1; -5)$ ,  $D(11; 0)$ . Chứng minh AD là đường phân giác  $\widehat{BAC}$ .

**Giải**

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (6; 8) \\ \overline{AC} = (4; -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow \overline{AB} \perp \overline{AC} \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

$$\overline{AD} = (14; 2); \cos(\overline{AD}, \overline{AC}) = \frac{|56 - 6|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{200}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{DAC} = 45^\circ.$$

Vậy AD là phân giác  $\widehat{BAC}$ .

**Ví dụ 3.** Cho bốn điểm  $A(-1; 2)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(5; 4)$  và  $D(1; 6)$ . Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp.

**Giải**

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{BA} = (-2; 2) \\ \overline{BC} = (4; 4) \end{array} \right. \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{DA} = (2; 4) \\ \overline{DC} = (-4; 2) \end{array} \right. \Rightarrow \overline{DA} \cdot \overline{DC} = 0 \Leftrightarrow \widehat{ADC} = 90^\circ.$$

Vậy ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AC.

### C. BÀI TẬP

**Bài 1.** Cho ba điểm  $A(5; -8)$ ,  $B(-3; -2)$ ,  $C(11; 0)$ .

- 1) Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông cân.
- 2) Xác định điểm D mà ABDC là hình vuông.

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(2; 0)$ ,  $B(0; 2)$ ,  $C(0; 7)$ . Tìm điểm D để ABCD là hình thang cân.

**Bài 3.** Cho  $A(1; -5)$ ,  $B(4; -1)$ ,  $C(11; 0)$ ,  $D(5; -8)$ . Tính diện tích tứ giác ABCD.

**Bài 4.** Cho  $A(-2; -2)$ ,  $B(5; -4)$ .

- 1) Tính tọa độ trọng tâm  $\triangle OAB$ .
- 2) Tìm điểm C để  $\triangle ABC$  có trọng tâm là điểm  $(2; 0)$ .

**Bài 5.** Cho 4 điểm  $A(1; 3)$ ,  $B(0; 5)$ ,  $C(4; 2)$  và  $D(-2; -1)$ . Chứng minh D là trực tâm  $\triangle ABC$ .

**Bài 6.** Cho  $A(0; 5)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $C(6; 7)$ . Chứng minh  $D(2; 3)$  là chân đường cao từ A của  $\triangle ABC$ .

**Bài 7.** Cho 5 điểm  $A(1; 3)$ ,  $B(6; 5)$ ,  $C(-1; 7)$ ,  $D(2; 5)$  và  $E(0; 5)$ .

- 1) Chứng minh  $2\overline{BE} = 3\overline{BD}$
- 2) Chứng minh D là trọng tâm  $\triangle ABC$ .

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(4; 3)$ ,  $B(-2; -1)$ ,  $C(8; -1)$ .

- 1) Xác định trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp I của  $\triangle ABC$ .
- 2) Chứng minh H, G, I thẳng hàng.

**Bài 9.** Cho  $A(0; \sqrt{2})$ ,  $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}\right)$ ,  $C\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

- 1) Tính các góc của  $\triangle ABC$ , suy ra tính chất.
- 2) Tìm tính chất tam giác không qua việc tính góc.

**Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(4; 3)$ ,  $B(0; -5)$ ,  $C(-6; -2)$ .

- 1) Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông tại B.
- 2) Tìm tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- 3) Tìm tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác.

### LỜI GIẢI

**Bài 1.** 1) Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-8; 6) \\ \overrightarrow{AC} = (6; 8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 10. \end{cases}$$

Vậy  $\triangle ABC$  vuông cân tại A.

2) Nhờ câu 1) nên chỉ cần định  $D(x; y)$  để  $ABDC$  là hình bình hành.

$$\begin{aligned} ABDC \text{ là hình bình hành} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 6 \\ y + 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow D(3; 6). \end{aligned}$$

**Bài 2.** •  $ABCD$  là hình thang cân, đáy  $BC \parallel AD$ . Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AD} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x - 2) = 0 \\ x^2 + (y - 7)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \\ x = 2 \\ y = 5 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy  $D(2; 9)$ .

•  $ABCD$  là hình thang cân, đáy  $AB \parallel CD$ . Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2(y - 7) \\ (x - 2)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ x^2 - 9x + 14 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ x = 2 \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ x = 7 \\ y = 0. \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy :  $D(7; 0)$ .

Tóm lại :  $D_1(2; 9)$ ,  $D_2(7; 0)$ .

**Bài 3.** Ta có :  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3; 4) \\ \overrightarrow{DC} = (6; 8) \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow AB \parallel CD$ .

Vậy ABCD là hình thang.

Mặt khác :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3; 4) \\ \overrightarrow{AD} = (4; -3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}.$$

Vậy ABCD là hình thang vuông.

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD)AD = \frac{3}{2}AB \cdot AD = \frac{3}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{75}{2}.$$

**Bài 4.** 1) Trọng tâm G của tam giác OAB có tọa độ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(0 - 2 + 5) = 1 \\ y = \frac{1}{3}(0 - 2 - 4) = -2 \end{cases} \Rightarrow G(1; -2).$$

2) Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} 2 = \frac{1}{3}(-2 + 5 + x_C) \\ 0 = \frac{1}{3}(-2 - 4 + y_C) \end{cases} \Rightarrow C(3; 6).$$

**Bài 5.** Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (-3; -4) \\ \overrightarrow{BC} = (4; -3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow AD \text{ là đường cao từ A}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BD} = (-2; -6) \\ \overrightarrow{CA} = (-3; 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow BD \text{ là đường cao từ B.}$$

Vậy D là trực tâm  $\triangle ABC$ .

**Bài 6.** Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (2; -2) \\ \overrightarrow{BC} = (5; 5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BD} = (1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BD}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra D là chân đường cao kẻ từ A của  $\triangle ABC$ .

**Bài 7.** 1) Ta có : 
$$\begin{cases} \overrightarrow{BE} = (-6; 0) \\ \overrightarrow{BD} = (-4; 0) \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BD}.$$

2) Gọi G là trọng tâm  $\triangle ABC$  : 
$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(1+6-1) = 2 \\ y_G = \frac{1}{3}(3+5+7) = 5. \end{cases}$$

Vậy  $G \equiv D$ .

**Bài 8.** 1) Toạ độ của trọng tâm G :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(4-2+8) = \frac{10}{3} \\ y = \frac{1}{3}(3-1-1) = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10(x-4) = 0 \\ -4(x+2) + 4(y+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow H(4; 5).$$

$$\begin{aligned} IA = IB = IC &\Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 6y + 25 = 4x + 2y + 5 \\ -8x - 6y + 25 = -16x + 2y + 65 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(3; -2). \end{aligned}$$

2) 
$$\begin{cases} \overrightarrow{IH} = (1, 7) \\ \overrightarrow{IG} = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Bài 9.** 1)  $\overrightarrow{BA} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}\right), \overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$

$$\cos B = \frac{\left| -\frac{1}{2} + 3 \right|}{\sqrt{\frac{10}{4}} \cdot \sqrt{\frac{20}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ.$$

$$\overrightarrow{CA} = \left( -\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \overrightarrow{CB} = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\cos C = \frac{\left| 1 + \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{\frac{10}{4}} \cdot \sqrt{\frac{20}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ACB} = 45^\circ.$$

Tam giác ABC vuông cân tại A.

$$2) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right) \\ \overrightarrow{AC} = \left( \sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{10}}{2}. \text{ Vậy } \triangle ABC \text{ vuông cân tại A.}$$

**Bài 10.1)**  $\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (4; 8) \\ \overrightarrow{BC} = (-6; 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ.$

2) Do  $\widehat{ABC} = 90^\circ$  nên tâm I là trung điểm cạnh huyền AC khi và chỉ khi  $I \left( -1; \frac{1}{2} \right).$

3) Phân giác trong góc B là BE.

$$\frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{EC}} = -\frac{BA}{BC} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Rightarrow E \left( -\frac{12}{7}; \frac{1}{7} \right).$$

Phân giác trong góc C là CF.

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{FB}} = -\frac{CA}{CB} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{FA} + 5\overrightarrow{FB} = \vec{0} \Rightarrow F \left( \frac{3}{2}; -2 \right).$$

J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi

$$J \in BE \cap CF \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BJ} \parallel \overrightarrow{BE} \\ \overrightarrow{CJ} \parallel \overrightarrow{CF} \end{cases} \Rightarrow J(-1; -2).$$

#### D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(11; 0)$ ,  $B(-3; -2)$ ,  $C(1; -5)$ . Tính diện tích  $\triangle ABC$ .

**Bài 2.** Cho  $A(-9; -10)$ ,  $B(0; 2)$ .

1) Tìm điểm  $C$  để  $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ .

2) Tìm điểm  $D$  để  $\overrightarrow{DA} = 4\overrightarrow{DB}$ .

**Bài 3.** Cho 5 điểm  $A(3; 6)$ ,  $B(-3; -2)$ ,  $C(0; 2)$ ,  $D(-9; -10)$ ,  $E(9; 14)$ . Chứng minh:

1)  $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = +\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BD}} = -1$ .

2)  $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}} = -\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{ED}} = -\frac{1}{2}$ .

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(3; 2)$ ,  $B(-11; 0)$ ,  $C(5; 4)$ . Tính tọa độ trọng tâm  $G$  và trực tâm  $H$  của  $\triangle ABC$ .

**Bài 5.** Cho 3 điểm  $A(7; 2)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(0; 5)$ . Tìm điểm  $D$  để  $ABCD$  là hình thang cân có hai cạnh xiên là  $AD$  và  $BC$ .

**Bài 6.** Cho  $A(-1; -2)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(0; 5)$ . Tìm điểm  $D$  để  $ABCD$  là hình vuông.

**Bài 7.** Cho  $A(3; 3)$ ,  $B\left(\frac{3-3\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$ . Chứng minh  $\triangle OAB$  đều.

**Bài 8.** Cho  $A(-1; 8)$ ,  $B(1; 6)$ ,  $C(3; 4)$ .

1) Chứng minh  $A, B, C$  thẳng hàng.

2) Cho thêm  $E(-1; 12)$  và  $F(9; -6)$ . Tìm  $D$  để  $B, C, D$  và  $E, F, D$  thẳng hàng.

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  với  $A(4; 3)$ ,  $B(-2; -1)$ ,  $C(8; -1)$ . Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**Bài 10.** Cho  $A(-4; 1)$ ,  $B(1; 4)$ .



1) Tìm C để OACB là hình vuông nhận AB làm đường chéo.

2) Tìm E, F để ABEF là hình vuông nhận AB làm cạnh.

**Bài 11.** Cho  $\triangle ABC$  với  $A(1; 8)$ ,  $B(-2; -1)$ ,  $C(6; 3)$ .

1) Xác định trục tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp I của  $\triangle ABC$ .

2) Chứng minh H, G, I thẳng hàng.

3) Chứng minh BCHI là hình thang.

4) Gọi D là điểm đối xứng của A qua I. Chứng minh tứ giác ABDC nội tiếp.

5) Tìm điểm E để BCED là hình thang cân đáy BC.

6) Chứng minh E thuộc đường tròn (ABCD).

7) Gọi K là điểm chia đoạn DE theo tỉ số  $-1/2$ . Chứng minh A, G, K thẳng hàng.

8) Chứng minh BC, DH, GK có cùng trung điểm.

### HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.**  $S = 25$ .

**Bài 2.**  $C(-3; -2)$ ,  $D(3; 6)$ .

**Bài 3.** Kiểm tra 5 điểm A, B, C, D, E cùng nằm trên một đường thẳng.

**Bài 4.**  $G(-1; 2)$ ,  $H\left(\frac{25}{3}; -\frac{58}{3}\right)$ .

**Bài 5.**  $D\left(\frac{132}{17}; \frac{118}{17}\right)$  loại  $D'(4; 6)$  vì ABCD' là hình bình hành.

**Bài 6.**  $D(-4; 2)$ .

**Bài 7.** Hướng dẫn : Chứng minh  $\begin{cases} OA = OB \\ \widehat{AOB} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle OAB \text{ đều.}$

**Bài 8.**  $D(4; 3)$ .

**Bài 9.**  $I(3; -2)$ .

**Bài 10.1)**  $C(-3; 5)$ .

$$2) \begin{cases} E(4; -1) \\ F(-1; -4) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} E(-2; 9) \\ F(-7; 6) \end{cases}.$$

**Bài 11.1)**  $H(3; 4)$ ,  $G\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)$ ,  $I(1; 3)$ .

5)  $E(5; 0)$ .

6) Chứng minh  $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{ED}$ .

$$7) K\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

8) Trung điểm chung  $M(2; 1)$ .

**E. ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP TOA ĐỘ  
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ  
LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT**

**Phương pháp**

1. Cho  $\triangle ABC$  có các cạnh  $a, b, c$ . Ta có :

$$|b - c| \leq a \leq b + c \text{ hay } |AC - AB| \leq BC \leq AC + AB.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AC}$ , trong đó  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

Như vậy ta chọn  $A, B, C$  có toạ độ thích hợp, dĩ nhiên liên quan với bất đẳng thức, chứng minh rồi sử dụng một trong hai bất đẳng thức ở trên suy ra kết quả.

2. Cho hai vectơ  $\vec{u} = (a; b)$ ,  $\vec{v} = (x; y)$ , ta có :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Do } |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1 \Rightarrow \frac{|ax + by|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $\vec{a}$  cùng phương với  $\vec{b}$ , tức là  $ay = bx$ .

**Chú ý.** (1) gọi là bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki cho 4 số thực  $a, b, x, y$  tùy ý.

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng với mọi số  $a, b, c$  ta có :

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2}.$$

**Giải**

Xét  $A(a; 0)$ ,  $B\left(-\frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)$ ,  $C\left(-\frac{c}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$ . Ta có :

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{b}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2} = \sqrt{a^2 + ab + b^2};$$

$$AC = \sqrt{\left(-\frac{c}{2} - a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2} = \sqrt{a^2 + ac + c^2};$$

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{c}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2} = \sqrt{b^2 + bc + c^2}.$$

Từ  $BC \leq AB + AC$  suy ra :

$$\sqrt{b^2 + bc + c^2} \leq \sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

**Ví dụ 2.** Cho hàm số :

$$y = \sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 6x + 18}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y$ .

**Giải**

$$\text{Ta có : } x^2 - 8x + 32 = (x - 4)^2 + 16 > 0, \forall x;$$

$$x^2 - 6x + 18 = (x - 3)^2 + 9 > 0, \forall x.$$

Tập xác định  $D_y = \mathbb{R}$ .

Xét hai điểm sau :

$$\left\{ \begin{array}{l} A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \\ B(x-3; 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} OA = \sqrt{x^2 - 8x + 32} \\ OB = \sqrt{x^2 - 6x + 18} \\ AB = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Do  $OA + OB \geq AB$  và dấu “=” xảy ra khi  $\overline{OA}$  cùng phương với  $\overline{OB}$ , tức là :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 6x + 18} \geq 5\sqrt{2} \\ 3(x-4) = -4(x-3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \geq 5\sqrt{2} \\ x = \frac{24}{7}. \end{array} \right.$$

Vậy  $\min y = 5\sqrt{2}$  khi  $x = \frac{24}{7}$ .

**Ví dụ 3.** Cho  $a > c > 0$  và  $b > c > 0$ . Chứng minh :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

### Giải

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 4 số  $\sqrt{c}$ ,  $\sqrt{a-c}$ ,  $\sqrt{b-c}$ ,  $\sqrt{c}$ ; ta có :

$$\begin{aligned} & |\sqrt{c} \cdot \sqrt{b-c} + \sqrt{a-c} \cdot \sqrt{c}| \leq \sqrt{c+a-c} \cdot \sqrt{b-c+c} \\ \Rightarrow & \sqrt{c(b-c)} + \sqrt{c(a-c)} \leq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

**Ví dụ 4.** Cho  $\alpha$  là một góc tùy ý thuộc  $(0^0; 180^0)$ . Xét :

$$y = \frac{(1-x^2)\cos\alpha - 2x\sin\alpha}{1+x^2}$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $y$ .

### Giải

Ta có :  $1+x^2 > 0, \forall x \Rightarrow D_y = \mathbb{R}$ . Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho  $1-x^2, -2x, \cos\alpha, \sin\alpha$  ta được :

$$\begin{aligned} |(1-x^2)\cos\alpha - 2x\sin\alpha| & \leq \sqrt{(1-x^2)^2 + 4x^2} \cdot \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \\ & \leq \sqrt{(1+x^2)^2} \sqrt{1} \leq 1+x^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|(1-x^2)\cos\alpha - 2x\sin\alpha|}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi :

$$(1-x^2)\sin\alpha = -2x\cos\alpha \Leftrightarrow x^2\sin\alpha - 2x\cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} \leq 0 \\ x = \frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{do } \sin\alpha > 0)$$

Vậy :  $\min_{x \in \mathbb{R}} y = -1$  khi  $x = \frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}$  ;

$\max_{x \in \mathbb{R}} y = 1$  khi  $x = \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$ .

## BÀI TẬP

**Bài 1.** Chứng minh rằng với mọi  $x$  ta có :

$$-1 < \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1.$$

Hướng dẫn : Xét 3 điểm  $A(-x; 0)$ ,  $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Sử dụng  $|AB - AC| \leq BC$ . Chú ý dấu “=” không xảy ra !

**Bài 2.** Cho  $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $y$ .

Hướng dẫn : Tập xác định  $D_y = [0; 2]$ .

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho  $1, 2\sqrt{2}, \sqrt{x}, \sqrt{2-x}$  ta được  $\max_{[0; 2]} y = 3\sqrt{2}$  khi  $x = \frac{2}{9} \in [0; 2]$ .

**Bài 3.** Chứng minh  $\forall x \in [-1; 3] : -10 < 4\sqrt{3-x} - 3\sqrt{x+1} < 10$ .

Hướng dẫn. Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 4 số  $4, -3, \sqrt{3-x}, \sqrt{x+1}$ .

## § 2. ĐƯỜNG THẲNG

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Phương trình tham số – phương trình chính tắc

##### a) Phương trình tham số

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  là vector chỉ phương của đường thẳng  $(\Delta)$  nếu giá của  $\vec{a}$  song song hoặc trùng với  $(\Delta)$ .
- Cho đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua  $M_0(x_0; y_0)$  có vector chỉ phương  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ . Phương trình tham số của đường thẳng  $(\Delta)$  là :

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} \quad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0) \quad (1)$$

##### b) Phương trình chính tắc

- Phương trình chính tắc của đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua  $M_0(x_0; y_0)$  có vector chỉ phương  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  là :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (a_1 \cdot a_2 \neq 0) \quad (2)$$

- Nếu  $a_1 \neq 0$  thì tỉ số  $k = \frac{a_2}{a_1}$  được gọi là hệ số góc của đường thẳng  $(\Delta)$ .

Phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  qua  $M_0(x_0; y_0)$  có hệ số góc  $k$  là :

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (3)$$

#### 2. Phương trình tổng quát

$\vec{n} \neq \vec{0}$  là vector pháp tuyến của đường thẳng  $(\Delta)$  nếu giá của  $\vec{n}$  vuông góc với  $(\Delta)$ .

- Cho đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua  $M_0(x_0; y_0)$  có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B)$ . Phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  là :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (4)$$

- Phương trình bậc nhất hai biến  $x, y$  có dạng

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \quad (5)$$

được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng  $(\Delta)$

- Đường thẳng  $(\Delta)$  có :  $\left\{ \begin{array}{l} \blacklozenge \text{ vector chỉ phương } \vec{a} = (-B; A) \\ \blacklozenge \text{ vector pháp tuyến } \vec{n} = (A; B) \end{array} \right.$

### 3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng  $(\Delta_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0;$

$(\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0.$

$$\begin{array}{l} \bullet (\Delta_1) \text{ cắt } (\Delta_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \\ \bullet (\Delta_1) // (\Delta_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \\ \bullet (\Delta_1) = (\Delta_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \end{array} \quad (6)$$

### 4. Góc giữa hai đường thẳng

Góc  $\varphi$  giữa hai đường thẳng  $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$  là :

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (7)$$

- Nếu  $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$  ta được :

$$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0;$$

$$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

## 5. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Khoảng cách từ điểm  $M_0(x_0; y_0)$  đến đường thẳng  $(\Delta)$  :

$Ax + By + C = 0$  là :

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (8)$$

## B. CÁC DẠNG TOÁN

### Dạng 1. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

#### Phương pháp

- Tổng quát là tìm điểm  $M_0(x_0; y_0)$  mà đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua, ngoài ra tìm thêm :
  - + Hoặc là điểm  $M_1(x_1; y_1) \in (\Delta)$  ;
  - + Hoặc là hệ số góc  $k$  của  $(\Delta)$ .
- Đặc biệt gặp các trường hợp sau thì cách tìm phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  nhanh chóng hơn :
  - $(\Delta) // (d): Ax + By + C = 0$  thì :
$$(\Delta): A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$
  - $(\Delta) \perp (d): Ax + By + C = 0$  thì :
$$(\Delta): B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0.$$
  - $(\Delta)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (n_1; n_2)$  thì :
$$(\Delta): n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0.$$
  - $(\Delta)$  có vectơ chỉ phương  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  thì :
$$(\Delta): a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0.$$
  - $(\Delta)$  qua  $A(a; 0), B(0; b)$  thì :
$$(\Delta): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



- Ví dụ 1.** Cho  $A(5; -1)$ ,  $B(-4; -2)$ ,  $C(8; 4)$ . Viết phương trình
- 1) Trung tuyến AM.
  - 2) Đường cao AH của  $\triangle ABC$ .

**Giải**

a) Tọa độ trung điểm của BC là  $M(2; 1)$ . Vector chỉ phương của AM là  $\overrightarrow{AM} = (-3; 2)$ .

Phương trình AM :

$$2(x-5) + 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 7 = 0.$$

b) Vector pháp tuyến của AH là  $\overrightarrow{BC} = (12; 6)$ .

Phương trình AH :

$$12(x-5) + 6(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 9 = 0.$$

**Ví dụ 2.** Cho ba đường thẳng :

$$(d_1): 2x - y + 5 = 0$$

$$(d_2): -x + y + 1 = 0$$

$$(d_3): 3x + 4y - 5 = 0.$$

Gọi A là giao điểm của  $(d_1)$  và  $(d_2)$ . Viết phương trình :

1)  $(\Delta_1)$  qua A và  $(\Delta_1) \parallel (d_3)$ .

2)  $(\Delta_2)$  qua A và  $(\Delta_2) \perp (d_3)$ .

3)  $(\Delta_3)$  qua A và  $(\Delta_3)$  hợp với  $(d_3)$  góc  $45^\circ$ .

**Giải**

Ta có :  $(d_1) \cap (d_2) = A(-6; -7)$ .

1) Phương trình  $(\Delta_1) \parallel (d_3)$  :

$$3(x+6) + 4(y+7) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + 46 = 0.$$

2) Phương trình  $(\Delta_2) \perp (d_3)$  :

$$4(x+6) - 3(y+7) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 3 = 0.$$

3) Vector chỉ phương của  $(d_3)$  là  $\overrightarrow{a_3} = (-4; 3)$ . Gọi k là hệ số góc của  $(\Delta_3)$  thì vector chỉ phương của  $(\Delta_3)$  là  $\overrightarrow{b_3} = (1; k)$ . Ta có :

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|-4 + 3k|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{1 + k^2}} \Leftrightarrow 7k^2 + 48k - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k - \frac{-24 - 25}{7} = -7 \\ k = \frac{-24 + 25}{7} = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Phương trình  $(\Delta_3)$  có dạng :

$$y = k(x - x_A) + y_A \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y + 49 = 0 \\ x - 7y - 43 = 0. \end{cases}$$

**Ví dụ 3.** Tìm phương trình các cạnh của  $\triangle ABC$  biết đỉnh  $B(2; -7)$ , phương trình đường cao  $AH : 3x + y + 11 = 0$  và trung tuyến  $CM : x + 2y + 7 = 0$ .

**Giải**

Phương trình cạnh  $BC$  :

$$(x - 2) - 3(y + 7) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 23 = 0.$$

Ta có :  $BC \cap CM = C(5; -6)$  ;

$$\left. \begin{array}{l} A \in AH \Leftrightarrow 3x_A + y_A + 11 = 0 \\ M \in CM \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_A + 2) + 2 \cdot \frac{1}{2}(y_A - 7) + 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A(-4, 1).$$

Vectơ chỉ phương của  $AB$  là  $\overrightarrow{AB} = (6; -8)$ .

Phương trình  $AB : 8(x + 4) + 6(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 13 = 0$ .

Tương tự, phương trình  $AC : 7x + 9y + 19 = 0$ .

## **Dạng 2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG**

### **Phương pháp**

Sử dụng công thức (7), hoặc có thể dùng phương pháp định thức giải và biện luận trực tiếp hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

**Ví dụ 1.** Cho hai đường thẳng :

$$(d_1): mx - y + 1 - m = 0;$$

$$(d_2): -x + my + 2 = 0.$$

Tùy theo  $m$ , biện luận vị trí tương đối giữa  $(d_1)$  và  $(d_2)$ .

### **Giải**

•  $m = 0$  :  $(d_1): y = 1$  ;  $(d_2): x = 2$ , do đó  $(d_1) \cap (d_2) = I(2; 1)$ .

•  $m \neq 0$  :

$$(d_1) \text{ cắt } (d_2) \Leftrightarrow \frac{m}{-1} \neq \frac{-1}{m} \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

$$(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{-1} = \frac{-1}{m} \\ \frac{m}{-1} \neq \frac{1-m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

$$(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow \frac{m}{-1} = \frac{-1}{m} = \frac{1-m}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -1.$$

Vậy :

$$\diamond m = 1 \Leftrightarrow (d_1) // (d_2);$$

$$\diamond m = -1 \Leftrightarrow (d_1) \equiv (d_2);$$

$$\diamond m \neq \pm 1 \Leftrightarrow (d_1) \text{ cắt } (d_2).$$

**Ví dụ 2.** Cho hai đường thẳng :

$$(d_1): (m-3)x + 2y + m^2 - 1 = 0;$$

$$(d_2): -x + my + (m-1)^2 = 0.$$

Tìm  $m$  để hai đường thẳng cắt nhau. Xác định giao điểm.

### **Giải**

$$(d_1) \text{ cắt } (d_2) \Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} m-3 & 2 \\ -1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Khi  $m \neq 1$  và  $m \neq 2$ , tọa độ giao điểm của  $(d_1)$  và  $(d_2)$  :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1-m^2 & 2 \\ -(1-m)^2 & m \end{vmatrix}}{m^2-3m+2} = \frac{(1-m)(m^2-m+2)}{(m-1)(m-2)} = \frac{m^2-m+2}{2-m}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} m-3 & 1-m^2 \\ -1 & -(1-m)^2 \end{vmatrix}}{m^2-3m+2} = \frac{(1-m)(m^2-3m+4)}{(m-1)(m-2)} \\ = \frac{m^2-3m+4}{2-m}.$$

$$\text{Vậy: } (d_1) \cap (d_2) = M\left(\frac{m^2-m+2}{2-m}; \frac{m^2-3m+4}{2-m}\right).$$

### Dạng 3. TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

#### Phương pháp

- Sử dụng công thức (7), nếu biết cặp vector chỉ phương hoặc cặp vector pháp tuyến.
- Nếu biết hệ số góc có thể dùng công thức bổ sung sau :

$$\tan(d_1, d_2) = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

**Ví dụ 1.** Tìm góc nhọn hợp bởi hai đường thẳng :

$$(d_1): 4x - 2y + 5 = 0 ; (d_2): x - 3y + 1 = 0.$$

#### Giải

Vector pháp tuyến của  $(d_1)$  là  $\vec{n}_1 = (4; -2)$ ;

Vector pháp tuyến của  $(d_2)$  là  $\vec{n}_2 = (1; -3)$ .

Gọi  $\varphi$  là góc nhọn của  $(d_1)$  và  $(d_2)$ , ta có :

$$\cos \varphi = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{4+6}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

**Ví dụ 2.** Cho hai đường thẳng  $(\Delta): \sqrt{3}x - y + 7 = 0$ ;  
 $(d): mx + y + 1 = 0$ .

Tìm  $m$  để  $(\Delta)$  hợp với  $(d)$  góc  $30^\circ$ .

### Giải

Ta có :  $\vec{n}_\Delta = (\sqrt{3}; -1)$ ,  $\vec{n}_d = (m; 1)$ . Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \left| \frac{m\sqrt{3} - 1}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{m^2 + 1}} \right| \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**Ví dụ 3.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(2; 0)$ ,  $B(8; 3)$ ,  $C(1; 2)$ . Tìm phương trình đường phân giác góc  $\widehat{BAC}$ .

### Giải

Gọi  $k$  là hệ số góc của đường phân giác  $AM$ .

Vector chỉ phương của  $AM$  là  $\vec{AM} = (1; k)$ .

Vector chỉ phương của  $AB$  là  $\vec{AB} = (6; 3)$ .

Vector chỉ phương của  $AC$  là  $\vec{AC} = (-1; 2)$ .

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AM}) = \cos(\vec{AM}, \vec{AC}) \Leftrightarrow \frac{6 + 3k}{3\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{-1 + 2k}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 1}} \\ \Rightarrow k = 3.$$

Phương trình  $AM$  :

$$y = 3(x - 2) \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0.$$

• **Chú ý.** Nếu phân giác ngoài góc  $\widehat{BAC}$  thì

$$\cos(\vec{BA}, \vec{AM}) = \cos(\vec{AM}, \vec{AC}) \Rightarrow k = -\frac{1}{3}.$$

**Ví dụ 4.** Cho đường thẳng  $(d): 2x - y + 3 = 0$ . Tìm đường thẳng  $(\Delta)$  qua  $A(-3; 1)$  và  $(\Delta)$  hợp với  $(d)$  góc  $45^\circ$ .

### Giải

Gọi  $k$  là hệ số góc của  $(\Delta)$ . Hệ số góc của  $(d)$  là 2.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$1 = \tan 45^\circ = \left| \frac{k-2}{1+2k} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Phương trình  $(\Delta)$  :

$$y = k(x+3) + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 8 = 0 \\ x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

#### **Dạng 4. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG**

##### **Phương pháp**

Khoảng cách từ điểm  $M_0(x_0; y_0)$  đến đường thẳng  $(\Delta)$  :  
 $Ax + By + C = 0$  được tính theo công thức :

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Ví dụ 1.** Tìm phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua gốc O và  $(\Delta)$  cách đều hai điểm  $A(2; 2)$ ,  $B(4; 0)$ .

##### **Giải**

Xét  $(\Delta)$  :  $y = kx \Leftrightarrow kx - y = 0$ .

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$d(A; (\Delta)) = d(B; (\Delta)) \Leftrightarrow \frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|4k|}{\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Hai đường thẳng cần tìm là  $(\Delta_1): x + y = 0$ ,  $(\Delta_2): x - 3y = 0$ .

##### **Chú ý.**

1) Ta không xét trường hợp  $(\Delta) \equiv Oy$  vì lúc đó  $d(A; (\Delta)) = 2$  và  $d(B; (\Delta)) = 4$ .

2) Nếu dùng công thức (8) với  $(\Delta) : Ax + By = 0$  thì ta được :

$$\frac{|2A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4A|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ 3A = -B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \text{ (do } A \text{ và } B \neq 0 \text{)}.$$

**Ví dụ 2.** Cho 3 đường thẳng :

$$(d_1): x - y + 4 = 0;$$

$$(d_2): 7x + y - 12 = 0;$$

$$(d_3): 3x + 5y + 4 = 0.$$

Gọi  $(d_1) \cap (d_2) = A$ ,  $(d_2) \cap (d_3) = B$  và  $(d_3) \cap (d_1) = C$ .

Tính diện tích tam giác ABC.

**Giải**

$$\text{Ta có : } A(1; 5) \Rightarrow h_a = d(A; (d_3)) = \frac{|3 + 25 + 4|}{\sqrt{34}} = \frac{32}{\sqrt{34}}.$$

$$\text{Vậy : } S = \frac{1}{2} \sqrt{34} \cdot \frac{32}{\sqrt{34}} = 16.$$

**Ví dụ 3.** Cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): 3x - 4y - 10 = 0;$$

$$(\Delta_2): 3x + 4y - 5 = 0.$$

Tìm phương trình các đường phân giác góc của  $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$ .

**Giải**

Gọi  $d_{1,2}$  là hai đường phân giác của  $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$  :

$$\begin{aligned} \forall M(x; y) \in d_{1,2} &\Leftrightarrow d(M; (\Delta_1)) = d(M; (\Delta_2)) \\ &\Leftrightarrow \frac{|3x - 4y - 10|}{5} = \frac{|3x + 4y - 5|}{5} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 10 = 3x + 4y - 5 \\ 3x - 4y - 10 = -3x - 4y + 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8y + 5 = 0 \\ 2x - 5 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

### C. BÀI TẬP

- Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  biết phương trình cạnh  $AB : 7x - y + 4 = 0$ , đường cao  $AH : 2x + y - 4 = 0$ , đường cao  $BH : x - y - 2 = 0$ . Viết phương trình các cạnh  $AC, BC$ .
- Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  biết đỉnh  $A(-3 ; 2)$ , phương trình hai đường cao :  $BH : 2x + y - 4 = 0$ ,  $CH : 7x - y + 4 = 0$ . Viết phương trình đường cao  $AH$  và các cạnh tam giác.
- Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  biết phương trình hai cạnh  $AB : 2x + y - 4 = 0$ ,  $AC : x + 3y - 12 = 0$ . Viết phương trình cạnh  $BC$  biết rằng  $BC$  nhận điểm  $M(4 ; 1)$  làm trung điểm.
- Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(4 ; 5)$ ,  $B(-5 ; -2)$ ,  $C(10 ; 1)$ . Tìm phương trình đường thẳng :
- 1)  $(\Delta_1)$  đối xứng của  $BC$  qua điểm  $A$ .
  - 2)  $(\Delta_2)$  đối xứng của  $AB$  qua  $AC$ .
- Bài 5.** Cho hình bình hành có phương trình hai cạnh là  $x - 5y + 11 = 0$  và  $2x - y - 5 = 0$  và phương trình đường chéo  $x + y - 1 = 0$ . Tìm phương trình hai cạnh kia.
- Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  đỉnh  $A(-3 ; -2)$ , phương trình đường cao  $BH : 2x + y - 2 = 0$ , trung tuyến  $CE : 2x - 9y + 13 = 0$ . Tìm phương trình các cạnh tam giác.
- Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  có đỉnh  $A(1 ; 5)$ , phương trình hai đường trung tuyến của tam giác là  $9x - 4y - 11 = 0$  và  $3x - 5y = 0$ . Viết phương trình ba cạnh của tam giác.
- Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A(4 ; 8)$ , trung điểm cạnh huyền  $BC$  là  $M(4 ; 3)$  và đường cao  $AH : 4x - 3y + 8 = 0$ . Viết phương trình các cạnh.
- Bài 9.** Cho hai điểm  $A(4 ; 0)$  và  $B(0 ; 5)$ . Xét  $(\Delta) : 2x - 2y - 1 = 0$ . Lập phương trình các đường thẳng  $(d_1), (d_2)$  qua  $A$  và  $B$ ,



nhận  $(\Delta)$  làm đường phân giác.

**Bài 10.** Cho  $(d) : 3x + 4y - 5 = 0$ . Viết phương trình  $(\Delta) // (d)$  và  $(\Delta)$  chẵn trên hai trục toạ độ tại hai điểm A và B sao cho :

1)  $dt(\Delta OAB) = 24$ .

2)  $d(O; (\Delta)) = 5$ .

### LỜI GIẢI

**Bài 1.** A(0 ; 4) và B(-1 ; -3). AC qua A và  $AC \perp BH$  nên

$$(AC) : (x - 0) + (y - 4) = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$$

BC qua B và  $BC \perp AH$  nên :

$$(BC) : (x + 1) - 2(y + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0.$$

**Bài 2.** H(0 ; 4)

• Vector chỉ phương của AH là  $\overrightarrow{AH} = (3; 2)$ .

Phương trình AH :

$$(AH) : 2(x - 0) - 3(y - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 12 = 0.$$

•  $AB \perp CH$  có phương trình

$$(AB) : (x + 3) + 7(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 7y - 11 = 0.$$

Tương tự cho AC :

$$(AC) : (x + 3) - 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 7 = 0.$$

$$AB \cap BH = B\left(\frac{17}{13}; \frac{18}{13}\right).$$

Vector pháp tuyến của BC là  $\overrightarrow{AH} = (3; 2)$ .

Phương trình BC :

$$(BC) : 3\left(x - \frac{17}{13}\right) + 2\left(y - \frac{18}{13}\right) = 0 \Leftrightarrow 39x + 26y - 87 = 0.$$

**Bài 3.** Cách 1.  $B(a; b) \in AB \Leftrightarrow 2a + b - 4 = 0$ .

$$C(c; d) \in AC \Leftrightarrow c + 3d - 12 = 0.$$

$$M \text{ là trung điểm của } BC \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ b + d = 2. \end{cases}$$

Từ đó ta có :  $a = 2, b = 0, c = 6, d = 2$ .

$$\begin{cases} B(2; 0) \\ C(6; 2) \end{cases} \Rightarrow BC: x - 2y - 2 = 0.$$

Cách 2. Gọi  $k$  là hệ số góc của  $BC$  :

$$(BC) : y - 1 = k(x - 4) \Leftrightarrow kx - y + 1 - 4k = 0.$$

$$AB \cap BC = B\left(\frac{3+4k}{2+k}; \frac{2-4k}{2+k}\right) \quad (k \neq -2);$$

$$AC \cap BC = C\left(\frac{9+12k}{1+3k}; \frac{1+8k}{1+3k}\right) \quad (k \neq -3).$$

$M(4; 1)$  là trung điểm  $BC$  nên ta có :

$$\begin{cases} \frac{3+4k}{2+k} + \frac{9+12k}{1+3k} = 8 \\ \frac{2-4k}{2+k} + \frac{1+8k}{1+3k} = 2 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Vậy  $(BC) : x - 2y - 2 = 0$ .

**Bài 4.** 1) Phương trình  $(BC) : x - 5y - 5 = 0$ .

Phương trình  $(d)$  qua  $A$  và  $d \perp BC$  :

$$5(x - 4) + (y - 5) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 25 = 0.$$

$BC \cap (d) = H(5; 0)$ . Gọi  $K$  là điểm đối xứng của  $H$  qua  $A$  thì  $K(3; 10)$ .  $(\Delta_1)$  qua  $K$  và  $(\Delta_1) \parallel BC$  nên :

$$(x - 3) - 5(y - 10) = 0 \Leftrightarrow x - 5y + 47 = 0.$$

2) Xét  $(\Delta_2)$  qua  $A(4; 5)$  :

$$y = k(x - 4) + 5 \Leftrightarrow kx - y + 5 - 4k = 0.$$

$(\Delta_2)$  đối xứng của  $AB$  qua  $AC$  khi và chỉ khi  $AC$  là phân giác góc  $(AB, \Delta_2)$ , tức là :

$$\begin{aligned} \cos(AB, AC) &= \cos(AC, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|-54 + 28|}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{130}} = \frac{|6 - 4k|}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{k^2 + 1}} \\ &\Leftrightarrow 351k^2 - 1560k + 1001 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} k = 7/9 \\ k = 11/3. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bullet k = \frac{11}{3} \Rightarrow (\Delta_2): 11x - 3y - 29 = 0.$$

$$\bullet k = \frac{7}{9} \Rightarrow (\Delta_2): 7x - 9y + 17 = 0 \text{ (loại vì } (\Delta_2) \equiv AB \text{)}.$$

**Bài 5.** Hai cạnh đã cho cắt nhau tại  $A(4; 3)$  gọi là  $AB$  và  $AD$ ; đường chéo đã cho không qua  $A$  nên là đường chéo  $BD$ .  
Vậy  $B(-1; 2)$ . Phương trình cạnh  $BC$ :

$$2(x+1) - (y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 4 = 0.$$

Và  $D(2; -1)$ , phương trình  $DC$ :

$$(x-2) - 5(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - 5y - 7 = 0.$$

**Bài 6.** Phương trình cạnh  $AC$ :

$$(x+3) - 2(y+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0.$$

$CE \cap AC = C(7; 3)$ . Gọi  $B(a; b)$ , ta có:

$$\begin{cases} 2a + b - 2 = 0 \\ 2\left(\frac{a-3}{2}\right) - 9\left(\frac{b-2}{2}\right) + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 4).$$

$$\text{Vậy } (AB): 3x - y + 7 = 0; (BC): x + 8y - 31 = 0.$$

**Bài 7.** Tọa độ  $A(1; 5)$  không thỏa các phương trình, nên đó là hai trung tuyến  $BE$  và  $CF$ . Gọi  $B(a; b)$  và  $C(u; v)$ .

$$\begin{cases} 9a - 4b - 11 = 0 \\ 3u - 5v = 0 \\ 9\left(\frac{1+u}{2}\right) - 4\left(\frac{5+v}{2}\right) - 11 = 0 \\ 3\left(\frac{1+a}{2}\right) - 5\left(\frac{5+b}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

$$B(-1; -5) \text{ và } C(5; 3).$$

$$\text{Vậy: } (AB): 5x - y = 0, (AC): x + 2y - 11 = 0,$$

$$(BC): 4x - 3y - 11 = 0.$$

**Bài 8.** Phương trình  $BC$ :

$$3(x-4) + 4(y-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 24 = 0.$$

Gọi  $B\left(x_0; 3 - \frac{3}{4}x_0\right) \in BC$ .

$$\forall MA = MB \Leftrightarrow 25 - (x_0 - 4)^2 = \left(2 - \frac{3}{4}x_0\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 8. \end{cases}$$

•  $x_0 = 0 \Rightarrow B(0; 6) : AB : x - 2y + 12 = 0 ;$

$AC : 2x + y - 16 = 0.$

•  $x_0 = 8 \Rightarrow B(8, 0) : AB : 2x + y - 16 = 0 ;$

$AC : x - 2y + 12 = 0.$

**Bài 9.** Xét điểm  $M\left(m; m - \frac{1}{2}\right) \in (\Delta)$ .

$$\overrightarrow{AM} = \left(m - 4; \frac{2m - 1}{2}\right) \Rightarrow k_1 = \frac{2m - 1}{2(m - 4)} \quad (m \neq 4).$$

$$\overrightarrow{BM} = \left(m; \frac{2m - 11}{2}\right) \Rightarrow k_2 = \frac{2m - 11}{2m} \quad (m \neq 0).$$

Hệ số góc của  $(\Delta) : k = 1$ .

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{aligned} \tan(MA, \Delta) = \tan(\Delta, MB) &\Leftrightarrow \left| \frac{1 - \frac{2m - 1}{2(m - 4)}}{1 + \frac{2m - 1}{2(m - 4)}} \right| = \left| \frac{\frac{2m - 11}{2m} - 1}{1 + \frac{2m - 11}{2m}} \right| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 11/8 \\ m = 22/9. \end{cases} \end{aligned}$$

•  $m = \frac{11}{8} \Rightarrow \begin{cases} (MA) : x + 3y - 4 = 0 \quad (d_1) \\ (MB) : 3x + y - 5 = 0 \quad (d_2). \end{cases}$

•  $m = \frac{22}{9} \Rightarrow \begin{cases} (MA) : 5x - 4y - 20 = 0 \\ (MB) : 5x - 4y + 20 = 0. \end{cases} \quad (\text{loại do } MA \parallel MB).$

**Bài 10.** Phương trình  $(\Delta)$  có dạng :  $3x + 4y + p = 0 \quad (p \neq 0)$ .

$$1) (\Delta) \cap Ox = A\left(-\frac{p}{3}; 0\right); (\Delta) \cap Oy = B\left(0; -\frac{p}{4}\right).$$

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$24 = \frac{1}{2} \left| -\frac{p}{3} \right| \left| -\frac{p}{4} \right| \Leftrightarrow p = \pm 24.$$

Vậy  $(\Delta_1): \begin{cases} 3x + 4y + 24 = 0 \\ 3x + 4y - 24 = 0. \end{cases}$

2) Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\frac{|p|}{5} = 5 \Leftrightarrow p = \pm 25.$$

Vậy  $(\Delta_2): \begin{cases} 3x + 4y + 25 = 0 \\ 3x + 4y - 25 = 0. \end{cases}$

#### D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(0 ; 3)$ ,  $B(-4 ; 1)$ ,  $C(8 ; -1)$ . Viết phương trình :

- 1) Ba cạnh tam giác.
- 2) Trung tuyến AM.
- 3) Đường cao AH.
- 4) Đường trung bình song song cạnh AB.
- 5) Đường phân giác trong AD.

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có đỉnh  $B(-6 ; 4)$ , phương trình cạnh AC :  $x - y - 2 = 0$ , đường cao AH :  $7x - y + 4 = 0$ . Tìm phương trình hai cạnh còn lại.

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi E, F, K là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Cho biết phương trình : EF :  $x - y + 3 = 0$ , FK :  $3x + 2y - 6 = 0$ , KE :  $8x - 3y - 16 = 0$ . Viết phương trình ba cạnh tam giác.

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  có phương trình hai cạnh AB :  $2x - y + 5 = 0$ , AC :  $3x + 6y - 1 = 0$ . Viết phương trình cạnh BC biết rằng  $\triangle ABC$  cân tại A và BC đi qua  $M(2 ; -1)$ .

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(-2 ; 3)$ ,  $B(5 ; -1)$ ,  $C(3 ; 7)$ . Viết phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  qua A và :

- 1)  $(\Delta)$  cách đều B và C.
- 2)  $(\Delta)$  hợp với BC góc  $45^\circ$ .

**Bài 6.** Cho điểm  $M(5; 2)$ . Tìm phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  cắt hai trục toạ độ tại A, B sao cho :

- 1)  $OA = OB$ .
- 2) AB nhận M làm trung điểm.

**Bài 7.** Cho điểm  $A(-1; 7)$ . Tìm phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua A sao cho khoảng cách từ gốc toạ độ đến  $(\Delta)$  :

- 1) bằng 5.
- 2) đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 8.** Cho hình bình hành OABD có O là gốc toạ độ, đỉnh  $A(-3; 0)$ , hai đường chéo OB và AD cắt nhau tại  $I(1; 2)$ .

- 1) Tìm phương trình các đường chéo.
- 2) Tìm phương trình bốn cạnh hình bình hành.

**Bài 9.** Cho điểm  $I(2; 3)$  và  $(\Delta) : x - 2y - 1 = 0$ .

- 1) Viết phương trình các đường chéo của hình vuông tâm I và có một cạnh thuộc  $(\Delta)$ .
- 2) Viết phương trình các cạnh hình vuông đó.

**Bài 10.** Cho ba đường thẳng :  $(d_1) : 3x + y - 12 = 0$ ,

$$(d_2) : x - 3y + 6 = 0,$$

$$(d_3) : y = m \quad (m \neq 3).$$

Gọi  $(d_1) \cap (d_2) = A$ ,  $(d_1) \cap (d_3) = B$  và  $(d_2) \cap (d_3) = C$ . Tìm m để  $dt(ABC) = \frac{4}{9}$ .

### HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.** 1)  $(AB) : x - 2y + 6 = 0$ ,  $(BC) : x + 6y - 2 = 0$ ,  
 $(CA) : x + 2y - 6 = 0$ .

$$2) (AM) : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0.$$

$$3) (AH) : 6x - y + 3 = 0.$$

$$4) \text{ Đường trung bình : } x - 2y - 2 = 0.$$

$$5) (AD) : \begin{cases} k = 2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 3 = 0.$$

$$\text{Bài 2. } (BC) : x + 7y - 22 = 0, (AB) : 7x + 5y + 22 = 0.$$

$$\text{Bài 3. } (AB) : 3x + 2y - 31 = 0, (BC) : x - y - 2 = 0,$$

$$(CA) : 8x - 3y + 9 = 0.$$

**Bài 4.** Hướng dẫn : BC qua M(2 ; -1) có hệ số góc k. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$B = C \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = 1/3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } 3x + y + 5 = 0, x - 3y - 5 = 0.$$

$$\text{Bài 5. } 1) (\Delta_1) : \begin{cases} y = 3 \\ 4x + y + 5 = 0. \end{cases} \quad 2) (\Delta_2) : x - y + 5 = 0.$$

$$\text{Bài 6. } 1) (\Delta_1) : \begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ x - y - 2 = 0. \end{cases} \quad 2) (\Delta_2) : 3x + 5y - 30 = 0.$$

$$\text{Bài 7. } 1) \begin{cases} 3x + 4y - 25 = 0 \\ 4x - 3y + 25 = 0. \end{cases}$$

$$2) d(O; (\Delta)) = d = \frac{|k + 7|}{\sqrt{k^2 + 1}}. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) có nghiệm k (với d là tham số), tức là phương trình

$$(1 - d^2)k^2 + 14k + 49 - d^2 = 0$$

có nghiệm k. Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} d = 1 \text{ có nghiệm } k = -\frac{24}{7} \\ \left[ \begin{array}{l} d \neq 1 \\ \Delta' \geq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} d \neq 1 \\ y^2 \leq 50 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} d \neq 1 \\ 0 < d \leq 5\sqrt{2}. \end{array} \right]$$

Vậy  $d \leq 5\sqrt{2}$  nên  $d_{\min} = 5\sqrt{2}$  với  $k = \frac{1}{5}$ , suy ra :

$$x - 7y + 50 = 0.$$

**Bài 8.** 1) (OB):  $2x - y = 0$ , (AD):  $x - 2y + 3 = 0$ .

2) (OA):  $y = 0$ , (AB):  $4x - 5y + 12 = 0$ ,

(BD):  $y = 4$ , (DO):  $4x - 5y = 0$ .

**Bài 9.** 1) Hai đường chéo qua I và hợp với  $(\Delta)$  góc  $45^\circ$  :

$$\begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0. \end{cases}$$

2) Cạnh song song với  $(\Delta)$  :  $x - 2y + 9 = 0$ .

Hai cạnh vuông góc với  $(\Delta)$  :

$$2x + y - 2 = 0 \text{ và } 2x + y - 12 = 0.$$

**Bài 10.**  $m = 2, m = 4$ .



## § 3. ĐƯỜNG TRÒN

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Phương trình đường tròn

Cho đường tròn  $(\mathcal{C})$  tâm  $I(a; b)$ , bán kính  $R$ . Phương trình đường tròn :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (1)$$

hoặc 
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \quad (2)$$

**Chú ý.** Phương trình ở dạng (2) thì bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

#### 2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Phương trình tiếp tuyến tại  $M_0(x_0; y_0) \in (\mathcal{C})$  là :

$$x_0x + y_0y - a(x_0 + x) - b(y_0 + y) + c = 0 \quad (3)$$

hoặc :

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2. \quad (4)$$

### B. CÁC DẠNG TOÁN

#### Dạng 1. TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN

**Ví dụ 1.** Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính:

1)  $x^2 - y^2 + 4x - 5y + 1 = 0$ ;

2)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$ ;

3)  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$ ;

4)  $2x^2 + 2y^2 - 3x - 2 = 0$ .

**Giải**

3)  $I(-3; 4), R = 3$ ;

4)  $I\left(\frac{3}{4}; 0\right), R = \frac{5}{4}$ .

**Ví dụ 2.** Cho phương trình :

$$x^2 + y^2 + (m-15)x - (m-5)y + m = 0 \quad (1)$$

- 1) Tìm  $m$  để (1) là phương trình đường tròn.
- 2) Khi  $m$  thay đổi, tìm tập hợp tâm các đường tròn có phương trình (1).

### **Giải**

- 1) Tâm  $I\left(\frac{15-m}{2}; \frac{m-5}{2}\right)$ , bán kính  $R$  cho bởi :

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{4}[(15-m)^2 + (m-5)^2] - m \\ &= \frac{1}{2}(m^2 - 22m + 125) > 0 \quad (\forall m). \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) là phương trình của đường tròn với mọi  $m$ .

- 2) Ta có :

$$I \begin{cases} x = \frac{1}{2}(15-m) \\ y = \frac{1}{2}(m-5). \end{cases}$$

Khử  $m$ , ta được  $x + y - 5 = 0$ .

Tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng :

$$(\Delta): x + y - 5 = 0.$$

## **Dạng 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN**

### **Phương pháp**

Trong trường hợp tổng quát, ta tìm hệ ba phương trình và giải :

- Nếu tìm được  $a, b, R$  ta có phương trình dạng (1).
- Nếu tìm được  $a, b, c$  ta có phương trình dạng (2).

**Ví dụ 1.** Tìm phương trình đường tròn đường kính AB với  $A(1; 1)$ ,  $B(7; 5)$ .

**Giải**

*Cách 1.* Ta có  $\overline{AB} = (6; 4) \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{52}$ . Tâm  $I(4; 3)$ .

Vậy  $(\mathcal{C}) : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$ .

*Cách 2.* Xét :

$$\begin{aligned} \forall M(x; y) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-7) + (y-1)(y-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0. \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.** Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  với  $A(-2; 4)$ ,  $B(5; 5)$ ,  $C(6; -2)$ .

**Giải**

Phương trình đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ .

Vì A, B, C thuộc  $(\mathcal{C})$  nên :

$$\begin{cases} 4a - 8b + c + 20 = 0 \\ -10a - 10b + c + 50 = 0 \\ -12a + 4b + c + 40 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -20. \end{cases}$$

Vậy  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ .

**Ví dụ 3.** Viết phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  qua  $A(-4; 2)$  và tiếp xúc với hai trục tọa độ.

**Giải**

Ta có  $I(a; b) \Rightarrow |a| = |b| = R$ . Do  $A(-4; 2)$  ở góc phần tư thứ II nên  $a = -b$  và :

$$R^2 = IA^2 \Leftrightarrow b^2 = (-4+b)^2 + (2-b)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = 10. \end{cases}$$

$$\bullet \quad b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ R = 2 \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{C}) : (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

$$\bullet \quad b = 10 \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ R = 10 \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{C}) : (x+10)^2 + (y-10)^2 = 100.$$

### Dạng 3. TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

#### Phương pháp

- Nếu biết tiếp điểm  $M_0(x_0; y_0)$  thì sử dụng công thức (3) hoặc công thức (4).
- Nếu tiếp tuyến tại  $M_0(x_0; y_0) \notin (\mathcal{C})$ , ta xét  $(\Delta)$  qua  $M_0$  có hệ số góc  $k$  và dùng điều kiện tiếp xúc:  
 $(\Delta)$  tiếp xúc  $(\mathcal{C}) \Leftrightarrow d(I; (\Delta)) = R$ .

**Ví dụ 1.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$ . Tìm phương trình tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại những điểm nó cắt hai trục tọa độ.

#### Giải

$$(\mathcal{C}) \cap O_x = \{A; B\} \text{ với } A(1; 0) \text{ và } B(3; 0).$$

$$(\mathcal{C}) \cap O_y = \{E; F\} \text{ với } E(0; -1) \text{ và } F(0; -3).$$

Phương trình tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại :

$$\bullet \quad A(1; 0): x - 2(x+1) + 2(y) + 3 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 1 = 0.$$

$$\bullet \quad B(3; 0): 3x - 2(x+3) + 2(y) + 3 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0.$$

$$\bullet \quad E(0; -1): -y - 2(x) + 2(y-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 1 = 0.$$

$$\bullet \quad F(0; -3): -3y - 2(x) + 2(y-3) + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x - y - 3 = 0.$$

**Ví dụ 2.** Cho  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 6y = 0$ . Tìm phương trình tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại :

1)  $A(-6; 0)$ .

2)  $B(2; 8)$ .

#### Giải

1)  $A \notin (\mathcal{C})$ , xét  $(\Delta)$  qua  $A$  có hệ số góc  $k$  :

$$y = k(x + 6) \Leftrightarrow kx - y + 6k = 0.$$

$$(\Delta) \text{ tiếp xúc } (\mathcal{C}) \Leftrightarrow d(I; (\Delta)) = R \Leftrightarrow \frac{|-3 + 6k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 4/3. \end{cases}$$

$$\bullet k = 0 \Rightarrow (\Delta) : y = 0 \text{ (trục hoành).}$$

$$\bullet k = \frac{4}{3} \Rightarrow (\Delta) : 4x - 3y + 24 = 0.$$

2)  $B(2; 8) \notin (\mathcal{C})$ . Xét đường thẳng  $(\Delta)$  qua B, với hệ số góc k, có phương trình :  $kx - y + 8 - 2k = 0$ . Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\frac{|-3 + 8 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3 \Leftrightarrow 5k^2 + 20k - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{-10 - 6\sqrt{5}}{5} \\ k = \frac{-10 + 6\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

Ta được hai tiếp tuyến.

**Ví dụ 3.** Lập phương trình  $(\mathcal{C})$  có tâm I thuộc đường thẳng (d) :  $4x + 3y - 2 = 0$  và tiếp xúc với  $(\Delta_1) : x + y + 4 = 0$  và  $(\Delta_2) : 7x - y + 4 = 0$ .

### Giải

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} 4a + 3b - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} |a + b + 4| = \sqrt{2}(a^2 + b^2 - c) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} |7a - b + 4| = 5\sqrt{2}(a^2 + b^2 - c). \end{cases} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có :

$$5|a + b + 4| = |7a - b + 4| \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b - 8 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 3a + b + 6 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Suy ra :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 0 \\ a = -4 \\ b = 6 \\ c = 34. \end{cases}$$

Vậy :  $(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$  ;  
 $(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 + 8x - 12y + 34 = 0$  .

### C. BÀI TẬP

**Bài 1.** Cho phương trình :

$$(\mathcal{C}): x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2(m-3)y + 2 = 0. \quad (1)$$

- 1) a) Tìm  $m$  để (1) không phải là đường tròn.  
 b) Tìm  $m$  để (1) là đường tròn tâm  $I(1 ; -3)$ . Viết phương trình  $(\mathcal{C})$  tương ứng.  
 c) Tìm  $m$  để (1) là đường tròn có  $R = 5\sqrt{2}$ . Viết phương trình  $(\mathcal{C})$  tương ứng.
- 2) Tìm tập hợp tâm các đường tròn  $(\mathcal{C})$ .

**Bài 2.** Cho  $(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y = 0 \quad (1)$

$$(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 - 2mx + m^2 - m = 0 \quad (2)$$

- 1) a) Tìm tâm và bán kính của  $(\mathcal{C}_1)$ .  
 b) Chứng tỏ  $(\mathcal{C}_2)$  là đường tròn với mọi  $m > 0$ .
- 2) Tìm  $m$  để  $(\mathcal{C}_1)$  cắt  $(\mathcal{C}_2)$ .

**Bài 3.** Tìm phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$ , biết rằng :

- 1)  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với hai trục tọa độ và có bán kính  $R = 3$ .
- 2)  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với  $Ox$  tại  $A(5 ; 0)$  và có bán kính  $R = 3$ .
- 3)  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với  $Oy$  tại  $B(0 ; 5)$  và đi qua  $C(5 ; 2)$ .

**Bài 4.** Lập phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với hai trục tọa độ và có tâm thuộc đường thẳng  $(\Delta): 2x - y - 4 = 0$ .

**Bài 5.** Lập phương trình đường tròn qua gốc tọa độ  $O$  và qua giao điểm của hai đường tròn :

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 ;$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0.$$

**Bài 6.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 2mx - \frac{3}{2}my + 25m - 100 = 0$

- 1) Tìm tập hợp  $(\Delta)$  tâm các đường tròn khi  $m$  thay đổi.
- 2) Xét  $A(8; 6)$ . Lập phương trình đường thẳng  $(d)$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C})$  tại  $A$ .
- 3) Nhận xét gì về các đường tròn  $(\mathcal{C})$ .

**Bài 7.** Tìm phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn :

$$(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0;$$

$$(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 - 8x - 16y + 79 = 0.$$

**Bài 8.** Cho  $M(5; 3)$  và  $(\Delta): 3x - 4y + 12 = 0$ . Lập phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  bán kính  $R = 5$ , đi qua  $M$  và  $(\mathcal{C})$  cắt  $(\Delta)$  tại  $A, B$  mà  $dt(MAB)_{\max}$ .

**Bài 9.** Cho đường thẳng  $(\Delta): 3x + 4y - 12 = 0$ .

- 1)  $(\Delta)$  cắt hai trục  $Ox$  và  $Oy$  tại  $A, B$ . Viết phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  đường kính  $AB$ . Chứng tỏ điểm gốc tọa độ  $O \in (\mathcal{C})$ .
- 2) Xét  $(d)$  qua gốc  $O$  và  $(d) \perp (\Delta)$ ,  $(d)$  cắt  $(\mathcal{C})$  tại  $E$ . Chứng minh  $\widehat{AEB} = 90^\circ$ .
- 3) Tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại  $O$  và  $E$  gặp nhau tại  $F$ . Chứng minh  $B$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle OEF$ .

**Bài 10.** Cho hai đường tròn :

$$(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0;$$

$$(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0.$$

- 1) Chứng tỏ  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$  không có điểm chung.
- 2) Chứng minh đường thẳng  $(\Delta_1): 4x - 3y + 3 = 0$  là tiếp tuyến chung của  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$ .
- 3) Xác định  $m$  để đường thẳng  $(\Delta_2): 3x + 4y + m = 0$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$ .

4) Tìm phương trình tiếp tuyến chung của  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$ .

### LỜI GIẢI

**Bài 1.**  $I(1-m; m-3)$ ,  $R^2 = 2(m-2)^2$ .

1) a) Yêu cầu bài toán tương đương với  $m = 2$ .

$$b) \begin{cases} 1-m=1 \\ m-3=-3 \end{cases} \Rightarrow m=0 \text{ và } R^2=8.$$

$$(\mathcal{C}_0): x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 = 0.$$

$$c) R = 5\sqrt{2} \rightarrow 2(m-2)^2 = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m=7 \\ m=-3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } (\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 + 12x - 8y + 2 = 0;$$

$$(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 - 8x + 12y + 2 = 0.$$

$$2) I \begin{cases} x=1-m \\ y=m-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1-x \neq 2 \\ y=-x-2. \end{cases}$$

Vậy tập hợp các tâm  $I$  là đường thẳng  $(\Delta): x + y + 2 = 0$  bỏ điểm  $J(-1; -1)$ .

**Bài 2.** 1)  $I_1(-1; \sqrt{3})$ ,  $R_1 = 2$ ;  $I_2(m; 0)$ ,  $R_2 = m$ ,  $m > 0$ .

$$2) \text{Ta có: } I_1 I_2^2 = (m+1)^2 + 3 = m^2 + 2m + 4;$$

$$R_1 + R_2 = m + 2; \quad |R_1 - R_2| = |m - 2|$$

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$|R_1 - R_2| < I_1 I_2 < R_1 + R_2$$

$$\Leftrightarrow |m-2|^2 < m^2 + 2m + 4 < (m+2)^2 \Rightarrow m > 0.$$

**Bài 3.** 1)  $|a| = |b| = 3$ . Ta được 4 phương trình:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9;$$

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9;$$

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9;$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9.$$



$$2) \begin{cases} a = 5 \\ |b| = 3 \end{cases}$$

Ta được hai phương trình :

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9;$$

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 9.$$

$$3) \begin{cases} |a| = R, b = 5 \\ IC = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ (a-5)^2 + 9 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{5} \\ b = 5. \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{34}{5}x - 10y + 25 = 0.$$

**Bài 4.** Ta có :  $|a| = |b|$ .

$$1) a = b. \text{ Do } I(a; a) \in (\Delta) \Leftrightarrow a = 4.$$

$$\text{Vậy : } (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16.$$

$$2) a = -b \Rightarrow I(-b; b) \in (\Delta) \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy : } \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

**Bài 5.** Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 0. \end{cases}$$

Ta suy ra  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 4)$ .

Phương trình đường tròn (OAB) dạng :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Ta có :

$$\begin{cases} c = 0 \\ 5 - 2a - 4b + c = 0 \\ 25 - 6a - 8b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = \frac{15}{2} \\ b = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } x^2 + y^2 - 15x + 5y = 0.$$

**Bài 6.** 1)  $I\left(m; \frac{3}{4}m\right)$ .

$$R^2 = m^2 + \frac{9}{16}m^2 - 25m + 100 = \frac{1}{16}(5m - 40)^2.$$

Điều kiện  $m \neq 8$ .

Tập hợp tâm  $I$  là đường thẳng  $(\Delta): 3x - 4y = 0$ , loại điểm  $A(8; 6)$ .

2) Nhận xét  $A(8; 6) \in (\mathcal{C})$  với mọi  $m$ .

Phương trình tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại  $A(8; 6)$  là :

$$8x + 6y - m(x + 8) - \frac{3m}{4}(y + 6) + 25m - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow (8 - m)(4x + 3y - 50) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 50 = 0 \text{ (do } m \neq 8 \text{)}.$$

3)  $(\Delta)$  và  $(d)$  cố định và đều đi qua  $A(8; 6)$  và  $(\Delta) \perp (d)$  nên suy ra các đường tròn  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với đường thẳng  $(d)$  cố định tại điểm  $A(8; 6)$  cố định  $(\forall m \neq 8)$ .

**Bài 7.**  $(\mathcal{C}_1): I_1(6; 4), R_1 = 3; I_2(4; 8), R_2 = 1$ .

Vì  $I_1I_2 = 2\sqrt{5} > R_1 + R_2 = 4$  nên  $(\mathcal{C}_1)$  không cắt  $(\mathcal{C}_2)$ : có 4 tiếp tuyến chung.

• Xét  $(\Delta): y = ax + b \Leftrightarrow ax - y + b = 0$ . Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} |6a - 4 + b| = 3\sqrt{a^2 + 1} \\ |4a - 8 + b| = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 10 \\ 9a + 2b = 14. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Từ (1) suy ra :

$$|a + 2| = \sqrt{a^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{49}{4}. \end{cases}$$

Vậy  $(\Delta_1): 3x + 4y - 49 = 0$ .

Từ (2) suy ra :

$$|a + 2| = 2\sqrt{a^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{4}{3} \end{cases}$$

•  $a = 0 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow (\Delta_2): y - 7 = 0.$

•  $a = \frac{4}{3} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow (\Delta_3): 4x - 3y + 3 = 0.$

• Xét  $(\Delta) // Oy: x = m$ . Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$\begin{cases} |6 - m| = 3 \\ |4 - m| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 9 \\ m = 3 \\ m = 5 \end{cases} \Rightarrow m = 3.$$

Vậy  $(\Delta_4): x - 3 = 0.$

**Bài 8.** Vì M và  $(\Delta)$  cố định nên  $S_{\max} \Leftrightarrow$  dây  $AB_{\max} \Leftrightarrow$  Tâm  $I \in (\Delta)$

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$\begin{cases} 3a - 4b + 12 = 0 \\ (5 - a)^2 + (3 - b)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3a + 12}{4} \\ 5a^2 - 32a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \\ a = \frac{32}{5} \\ b = \frac{39}{5} \end{cases}$$

Vậy  $(\mathcal{C}): \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 - \frac{64x}{5} - \frac{78}{5}y + \frac{384}{5} = 0. \end{cases}$

**Bài 9.** 1)  $A(4; 0), B(0; 3)$  có trung điểm  $I\left(2; \frac{3}{2}\right)$  và  $AB = 5.$

Phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  đường kính AB:

$$(x - 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0.$$

Nhận xét gốc  $O \in (\mathcal{C}).$

2) Phương trình đường thẳng  $(d): 4x - 3y = 0.$

Giao điểm của  $(\mathcal{C})$  và  $(d)$  là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = \frac{72}{25} \\ y = \frac{96}{25} \end{cases}$$

Vậy  $(d) \cap (\mathcal{C}) = \{O; E\}$  với  $E\left(\frac{72}{25}; \frac{96}{25}\right)$ .

Ta có :  $\overrightarrow{AE} = \left(-\frac{28}{25}; \frac{96}{25}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ ;  $\overrightarrow{BE} = \left(\frac{72}{25}; \frac{21}{25}\right)$ . Từ đó suy ra đpcm.

3) Phương trình tiếp tuyến với đường tròn  $(\mathcal{C})$  tại gốc O là  $4x + 3y = 0$ , tại E là  $44x + 117y - 576 = 0$ .

$$d(B; OE) = \frac{|4(0) - 3(3)|}{5} = \frac{9}{5};$$

$$d(B; OF) = \frac{|4(0) + 3(3)|}{5} = \frac{9}{5};$$

$$d(B; EF) = \frac{|44(0) + 117(3) - 576|}{\sqrt{44^2 + 117^2}} = \frac{|-225|}{125} = \frac{9}{5}.$$

Do đó B là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle OEF$ .

**Bài 10.**  $(\mathcal{C}_1)$  có  $I_1(2; 2)$ ,  $R_1 = 1$ ;  $(\mathcal{C}_2)$  có  $I_2(6; 4)$ ,  $R_2 = 3$ .

$$1) I_1 I_2 = 2\sqrt{5} > R_1 + R_2 = 4 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

$$2) d(I_1; (\Delta_1)) = \frac{|8 - 6 + 3|}{5} = 1 = R_1.$$

$$d(I_2; (\Delta_1)) = \frac{|24 - 12 + 3|}{5} = 3 = R_2.$$

Từ đó suy ra đpcm.

$$3) \begin{cases} |3(2) + 4(2) + m| = 5 \\ |3(6) + 4(4) + m| = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 14| = 5 \\ |m + 52| = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -9 \\ m = -19 \\ m = -19 \\ m = -49 \end{cases} \Rightarrow m = -19.$$

4) Ngoài ra có hai tiếp tuyến chung đặc biệt là  $y = 1$  và  $x = 3$ .

## D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho đường cong ( $\mathcal{C}$ ) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + (m - 15)x - (m - 5)y + m = 0.$$

- 1) a) Chứng minh ( $\mathcal{C}$ ) là đường tròn với mọi  $m$ .  
b) Tìm bán kính đường tròn qua gốc tọa độ  $O$ .  
c) Tìm tâm đường tròn có bán kính  $R = \sqrt{130}$ .  
2) Tìm tập hợp tâm các đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) khi  $m$  thay đổi.

**Bài 2.** Tìm phương trình đường tròn ( $\mathcal{C}$ ), biết rằng :

- 1) Tâm  $I(1; -5)$  và qua gốc tọa độ  $O$ .  
2) Tiếp xúc với trục tung tại gốc  $O$  có  $R = \sqrt{2}$ .  
3) Ngoại tiếp  $\triangle OAB$  với  $A(4; 0)$ ,  $B(0; -2)$ .  
4) Tiếp xúc với  $Ox$  tại  $A(6; 0)$  và qua  $B(9; 3)$ .

**Bài 3.** Cho hai điểm  $A(-1; 6)$  và  $B(-5; 2)$ . Lập phương trình đường tròn ( $\mathcal{C}$ ), biết :

- 1) Đường kính  $AB$ .  
2) Tâm  $O$  và đi qua  $A$ , tâm  $O$  và đi qua  $B$ .  
3) ( $\mathcal{C}$ ) ngoại tiếp  $\triangle OAB$ .  
4) Tâm nằm trên đường trung trực của đoạn  $AB$  và tiếp xúc với trục  $Oy$  tại gốc  $O$ .

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(8; 0)$ ,  $B(9; 3)$ ,  $C(0; 6)$ .

- 1) Chứng minh tứ giác  $OABC$  nội tiếp. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ( $\mathcal{C}$ ).  
2) Viết phương trình tiếp tuyến với ( $\mathcal{C}$ ) tại 4 đỉnh.

3) Qua B, kẻ  $BH \perp OA$ ,  $BK \perp OC$ ,  $BL \perp AC$ . Viết phương trình các đường thẳng HK, HL. Chứng minh H, K, L thẳng hàng.

**Bài 5.** Cho hai đường tròn :  $(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ ;  
 $(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$ .

- 1) Chứng minh  $(\mathcal{C}_1)$  cắt  $(\mathcal{C}_2)$  tại hai điểm A, B.
- 2) Viết phương trình tiếp tuyến với  $(\mathcal{C}_1)$  tại điểm I(-1 ; 6).
- 3) Chứng minh các đường tiếp tuyến ở câu 2) cũng là tiếp tuyến cho  $(\mathcal{C}_2)$ . Suy ra phương trình tiếp tuyến chung của  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$ .

**Bài 6.** Tìm phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn :

$$(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 ;$$

$$(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0.$$

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  có A(-8 ; -2), B(4 ; 4), C(8 ; 0). Gọi M là trung điểm AC và D là điểm đối xứng của B qua M. Chứng minh các đường tròn (MBC) và (MAD) bằng nhau.

**Bài 8.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$ .

- 1) Viết phương trình tiếp tuyến  $(\Delta_1), (\Delta_2), (\Delta_3)$  với  $(\mathcal{C})$  tại E(1 ; -3), F(-2 ; -4), K(-2 ; 0).
- 2)  $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = A$ ,  $(\Delta_2) \cap (\Delta_3) = B$ ,  $(\Delta_3) \cap (\Delta_1) = C$ . Tính diện tích  $\triangle ABC$ .

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  có A(0 ; 5), B(-2 ; -1), C(4 ; 2).

- 1) Chứng minh H(1 ; 3) là trực tâm  $\triangle ABC$ .
- 2) Chứng minh ba đường tròn (HAC), (HCB) và (HBA) bằng nhau.

**Bài 10.** Cho hai điểm A(8 ; -3), B(0 ; 9) và đường tròn  $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 6x + 4y - 13 = 0$ .

- 1) Tìm những điểm trên  $(\mathcal{C})$  cách đều A và B.

2) Giả sử tìm được hai điểm M và N trên  $(\mathcal{C})$  cách đều A và B. Chứng tỏ rằng M nhìn AB dưới một góc vuông và N thuộc đường thẳng AB.

### HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.** 1) a)  $R^2 = \frac{1}{2}(m^2 - 22m + 125) > 0 \forall m.$

b)  $m = 0 \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{10}}{2}.$

c)  $\begin{cases} m = 27 \Rightarrow I(-6; 11) \\ m = -5 \Rightarrow I(10; -5). \end{cases}$

2) Tập hợp cần tìm là đường thẳng (d).

**Bài 2.** 1)  $x^2 + y^2 - 2x + 10y = 0.$

2)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x = 0 \\ x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x = 0. \end{cases}$

3)  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5.$

4)  $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 36 = 0.$

**Bài 3.** 1)  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 8.$

2)  $x^2 + y^2 = 37, x^2 + y^2 = 29.$

3)  $x^2 + y^2 + \frac{9}{25}x - \frac{14}{25}y = 0.$

4) Hướng dẫn : Trung trực  $(\Delta)$  của AB cắt Ox tại  $I(1; 0) :$   
 $x^2 + y^2 - 2x = 0.$

**Bài 4.** 1)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$

$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0.$

2) Phương trình tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại :

▪ Gốc O :  $4x + 3y = 0.$

▪ A(8; 0) :  $4x - 3y - 32 = 0.$

▪ C(0; 6) :  $4x - 3y + 18 = 0.$

•  $B(9; 3) : x = 9.$

3)  $H(9; 0), K(0; 3), L\left(\frac{36}{5}; \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} (HK): x + 9y - 9 = 0 \\ (HL): x + 9y - 9 = 0. \end{cases}$

Từ đó suy ra đpcm.

**Bài 5.** 1)  $(\mathcal{C}_1) \cap (\mathcal{C}_2) = \{A; B\}$  với  $A(1; 2)$  và  $B(3; 4).$

2) Hướng dẫn : Xét  $(\Delta)$  qua  $I(-1; 6)$  có hệ số góc  $k$ . Dùng điều kiện tiếp xúc của  $(\Delta)$  với  $(\mathcal{C}_1)$  ta được :

$$k_1 = -3 \Rightarrow (\Delta_1): 3x + y - 3 = 0.$$

$$k_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow (\Delta_2): x + 3y - 17 = 0.$$

3) Hướng dẫn : Chứng minh  $d(I_2; (\Delta_{1,2})) = R_2$ . Do  $(\mathcal{C}_1)$  cắt  $(\mathcal{C}_2)$  tại  $A, B$  nên chúng có tiếp tuyến chung là  $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$ .

**Bài 6.**  $(\Delta_1): 3x + y - 3 = 0 ; (\Delta_2): x + 3y - 17 = 0.$

**Bài 7.**  $(MBC): x^2 + y^2 - \frac{71}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{8}{9} = 0.$

$$(MAD): x^2 + y^2 + \frac{71}{9}x + \frac{35}{9}y + \frac{26}{9} = 0.$$

Do đó :  $R_1 = R_2 = \frac{\sqrt{5330}}{18} \Rightarrow$  đpcm.

**Bài 8.** Chú ý  $E, F, K \in (\mathcal{C}) \Rightarrow A(0; -5), B(-6; -2), C(4; 3)$ . Chú ý  $(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \Rightarrow S = 3\sqrt{65}.$

**Bài 9.** 1) Chứng minh :  $\begin{cases} \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{BH} \cdot \overline{CA} = 0 \end{cases} \Rightarrow$  đpcm.

2)  $(HAC): x^2 + y^2 - 7x - 11y + 30 = 0.$

$(HCB): x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0.$

$(HBA): x^2 + y^2 + 5x - 5y = 0.$



$$\text{Ta có : } R_1 = R_2 = R_3 = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

**Bài 10.**Hướng dẫn : Tìm phương trình đường trung trực đoạn AB

$$(\Delta): 6x + 8y - 23 = 0.$$

M, N có toạ độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 6x + 8y - 23 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-2; -1) \\ N(4; 3). \end{cases}$$

Kiểm tra :

$$\begin{cases} \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0 \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 0. \end{cases}$$

## § 4. BA ĐƯỜNG CÔN IC

### A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

#### 1. Elip

##### a) Định nghĩa

$$(E) = \{M / MF_1 + MF_2 = 2a\} \quad (a > c).$$

$F_1F_2 = 2c$  gọi là tiêu cự.

##### b) Phương trình chính tắc

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó :

$$\begin{cases} b^2 = a^2 - c^2 \text{ và } a > b > 0 \\ F_1(-c; 0) \text{ và } F_2(c; 0). \end{cases}$$

##### c) Tâm sai

$$e = \frac{c}{a} < 1.$$

##### d) Hình dạng elip

- Elip nhận hai trục toạ độ làm trục đối xứng và gốc O làm tâm đối xứng.
- Elip cắt Ox tại  $A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$  : hai đỉnh trục lớn ;  
Elip cắt Oy tại  $B_1(0; -b)$ ,  $B_2(0; b)$  : hai đỉnh trục nhỏ.
- $A_1A_2 = 2a$  gọi là trục lớn ;  $B_1B_2 = 2b$  gọi là trục nhỏ.
- Elip nội tiếp hình chữ nhật cơ sở kích thước  $2a \times 2b$ .

#### 2. Hypebol

##### a) Định nghĩa

$$(H) = \{M / |MF_1 - MF_2| = 2a\} \quad (a < c).$$

$F_1F_2 = 2c$  gọi là tiêu cự.

##### b) Phương trình chính tắc

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó : 
$$\begin{cases} b^2 = c^2 - a^2 \\ F_1(-c; 0), F_2(c; 0). \end{cases}$$

c) **Tâm sai** 
$$e = \frac{c}{a} > 1.$$

**d) Hình dạng Hypebol**

- Hypebol nhận hai trục toạ độ làm trục đối xứng và gốc O làm tâm đối xứng.
- Hypebol cắt Ox tại  $A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$  gọi là hai đỉnh trục thực.  
Hypebol không cắt Oy ; đặt  $B_1(0; -b)$ ,  $B_2(0; b)$  gọi là hai đỉnh trục ảo.
- $A_1A_2 = 2a$  gọi là trục thực ;  $B_1B_2 = 2b$  gọi là trục ảo.
- Hypebol ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở, kích thước  $2a \times 2b$ .
- Hypebol nhận hai đường thẳng có phương trình  $y = -\frac{b}{a}x$  và  $y = +\frac{b}{a}x$  làm hai đường tiệm cận : Đó là hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở và dĩ nhiên qua gốc O.

**3. Parabol**

**a) Định nghĩa**

Cho  $F \notin (\Delta) : (P) = \{M / MF = d(M; (\Delta))\} :$

**b) Phương trình chính tắc**

$$(P) : y^2 = 2px,$$

trong đó : 
$$\begin{cases} p = d(F; (\Delta)) \\ \text{Tiêu điểm } F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \\ \text{Đường chuẩn } (\Delta) : x = -\frac{p}{2}. \end{cases}$$

**c) Hình dạng parabol**

- Parabol nhận Ox làm trục đối xứng, nhận gốc O làm đỉnh.

- Parabol nằm ở 4 vị trí tương ứng với 4 phương trình :

$$\begin{aligned} \text{▪ (P) : } y^2 = 2px &\Rightarrow \begin{cases} \text{Trục đối xứng Ox} \\ F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \\ (\Delta) : x = -\frac{p}{2} \\ \text{(P) nằm bên phải Oy.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{▪ (P) : } y^2 = -2px &\Rightarrow \begin{cases} \text{Trục đối xứng Ox} \\ F\left(-\frac{p}{2}; 0\right) \\ (\Delta) : x = \frac{p}{2} \\ \text{(P) nằm bên trái Oy.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{▪ (P) : } x^2 = 2py &\Rightarrow \begin{cases} \text{Trục đối xứng Oy} \\ F\left(0; \frac{p}{2}\right) \\ (\Delta) : y = -\frac{p}{2} \\ \text{(P) nằm trên Ox.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{▪ (P) : } x^2 = -2py &\Rightarrow \begin{cases} \text{Trục đối xứng Oy} \\ F\left(0; -\frac{p}{2}\right) \\ (\Delta) : y = \frac{p}{2} \\ \text{(P) nằm dưới Ox.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

#### 4. Ba đường côníc

Cho điểm F cố định và đường thẳng  $(\Delta)$  không qua F.

$$(C) = \left\{ M \mid \frac{MF}{d(M; (\Delta))} = e \right\},$$

F : tiêu điểm,  $(\Delta)$  : đường chuẩn.

- $0 < e < 1$  : (C) là elip.
- $e = 1$  : (C) là parabol.
- $e > 1$  : (C) là hypebol.

## B. CÁC DẠNG TOÁN

### Dạng 1. TÌM CÁC YẾU TỐ CỦA CÔNIC

#### Phương pháp

Từ phương trình chính tắc của elip, hypebol, parabol, ta suy ra được các yếu tố xác định của côníc đó. Đặc biệt chú ý :

- Elip :  $a > c$  và  $b^2 = a^2 - c^2$  ( $a > b$ ).
- Hypebol :  $a < c$  và  $b^2 = c^2 - a^2$ .
- Parabol :  $p = d(F; (\Delta)) > 0$ .

**Ví dụ 1.** Tìm các yếu tố của elip (E):  $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$ .

**Giải**

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9.$$

Trục lớn :  $A_1A_2 = 2a = 10$ .

Trục nhỏ :  $B_1B_2 = 2b = 8$ .

Tiêu cự :  $F_1F_2 = 2c = 6$ .

Tiêu điểm :  $F_1(-3; 0), F_2(3; 0)$ .

Tâm sai :  $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} < 1$ .

**Ví dụ 2.** Tìm các yếu tố của các hypebol :

$$(H_1): x^2 - 4y^2 - 4 = 0;$$

$$(H_2): 4x^2 - y^2 - 4 = 0.$$

**Giải**

$$\bullet (H_1): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 5 \quad (a > b).$$

Trục thực :  $A_1A_2 = 2a = 4$ .

Trục ảo :  $B_1B_2 = 2b = 2$ .

Tiêu cự :  $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{5}$ .

Tiêu điểm :  $F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0)$ .

Tâm sai :  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ .

Tiệm cận :  $y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}x$ .

•  $(H_2): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 5$ .

Trục thực :  $A_1A_2 = 2a = 2$ .

Trục ảo :  $B_1B_2 = 2b = 4$ .

Tiêu cự :  $F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0)$ .

Tâm sai :  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ .

Tiệm cận :  $y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm 2x$ .

**Ví dụ 3.** Tìm các yếu tố của parabol :

$(P_1): y^2 = x$ .  $(P_2): y^2 = -3x$ .

$(P_3): x^2 = \frac{1}{4}y$ .  $(P_4): x^2 = -\frac{3}{4}y$ .

### ***Giải***

•  $(P_1): y^2 = x = 2\left(\frac{1}{2}\right)x \Rightarrow p = \frac{1}{2} > 0$ .

Tiêu điểm :  $F\left(\frac{1}{4}; 0\right) \in Ox$ .

Đường chuẩn :  $(\Delta): x = -\frac{1}{4}$ .

•  $(P_2): y^2 = -3x = -2\left(\frac{3}{2}\right)x \Rightarrow p = \frac{3}{2} > 0$ .

Tiêu điểm :  $F\left(-\frac{3}{4}; 0\right) \in Ox$ .

Đường chuẩn :  $(\Delta): x = \frac{3}{4}$ .

•  $(P_3): x^2 = \frac{1}{4}y = 2\left(\frac{1}{8}\right)y \Rightarrow p = \frac{1}{8} > 0$ .

Tiêu điểm :  $F\left(0; \frac{1}{16}\right) \in Oy$ .

Đường chuẩn :  $(\Delta): y = -\frac{1}{16}$ .

•  $(P_4): x^2 = -\frac{3}{4}y = -2\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow p = \frac{3}{8} > 0$ .

Tiêu điểm :  $F\left(0; -\frac{3}{16}\right) \in Oy$ .

Đường chuẩn :  $(\Delta): y = \frac{3}{16}$ .

## Dạng 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA CÔNIC

### Phương pháp

- Với elip : Tìm được  $a, b$  thì ta có phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b).$$

- Với hypebol : Tìm  $a, b$ . Tùy theo độ lớn của trục thực, trục ảo ta suy ra phương trình (một hoặc hai phương trình).
- Với parabol : Tính  $p > 0$ . Tùy theo vị trí tiêu điểm và đường chuẩn ta suy ra phương trình (dạng (1)  $\rightarrow$  (4)).

**Ví dụ 1.** Tìm phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có tâm sai  $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$  và đi qua  $M\left(-\sqrt{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ .

### ***Giải***

Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng :

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Theo đề bài ta có :

$$\begin{cases} 5a^2 = 9c^2 \\ 27b^2 + 24a^2 = 9a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 = 9b^2 \\ 27b^2 + 24a^2 = 9a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4. \end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của elip là (E):  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Ví dụ 2.** Tìm phương trình chính tắc của hypebol (H), biết hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng 24 và chu vi 20.

### ***Giải***

Theo giả thiết :

$$\begin{cases} 2a \cdot 2b = 24 \\ 2(2a + 2b) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ a + b = 5. \end{cases}$$

Vậy a, b là nghiệm phương trình :

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ a = 2 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vì đề bài không phân biệt độ dài của trục thực và trục ảo, nên ta được hai phương trình :

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ hoặc } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

**Ví dụ 3.** Tìm phương trình chính tắc của hypebol (H), biết phương trình hai đường tiệm cận là  $2x \pm \sqrt{5}y = 0$  và tiêu cự bằng 6.

### ***Giải***

Ta có :  $2x \pm \sqrt{5}y = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$ .

$$\text{Theo giả thiết : } \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b^2 = 4a^2 \\ 9 = a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 5 \\ b^2 = 4. \end{cases}$$



Vậy phương trình chính tắc của hypebol là (H) :  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Chú ý.** Ta không chọn phương trình dạng  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ , vì như vậy phương trình tiệm cận của hypebol là  $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$  (trái giả thiết).

**Ví dụ 4.** Lập phương trình chính tắc của parabol (P) khi biết :

- (P) qua điểm  $M(-4; 3)$ .
- Tiêu điểm  $F(0; -4)$ .
- Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn bằng  $\sqrt{2}$  và tiêu điểm thuộc trục hoành.

### ***Giải***

a) Vì  $M(-4; 3)$  ở góc phần tư thứ II nên phương trình chính tắc của parabol (P) có dạng :

$$\bullet y^2 = -2px.$$

$$\text{Theo giả thiết : } 9 = -2(p)(-4) \Leftrightarrow p = \frac{9}{8} > 0.$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của parabol là (P) : } y^2 = -\frac{9}{4}x.$$

$$\bullet x^2 = 2py.$$

$$\text{Theo giả thiết : } 16 = 2(p)(3) \Leftrightarrow p = \frac{8}{3} > 0.$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của parabol là (P) : } x^2 = \frac{16}{3}y.$$

$$\text{b) Theo giả thiết : } F(0; -4) \in Oy \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow p = 8 > 0 \\ x^2 = -2py. \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của parabol là (P) : } x^2 = -16y.$$

$$\text{c) Theo giả thiết : } \begin{cases} p = \sqrt{2} \\ F \in Ox \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \sqrt{2} \\ y^2 = \pm 2px. \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của parabol là (P) : } y^2 = \pm 2\sqrt{2}x.$$

### Dạng 3. TÌM MỘT ĐIỂM TRÊN CÔNIC THOẢ TÍNH CHẤT ( $\mathcal{P}$ )

#### Phương pháp

Ta lập và giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (x; y) \text{ nghiệm đúng phương trình chính tắc } (C) \\ M(x; y) \text{ thoả tính chất } (\mathcal{P}). \end{cases}$$

**Ví dụ 1.** Tìm điểm  $M$  nằm trên hypebol  $(H): x^2 - 3y^2 - 3 = 0$  mà  $M$  nhìn hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  dưới một góc vuông.

#### Giải

Gọi  $M(x; y) \in (H)$ . Theo giả thiết :

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 - 3 = 0 \\ OM = \frac{1}{2} F_1 F_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3y^2 - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = c^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{15}{4} \\ y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ta được 4 điểm  $M$  tạo thành một hình chữ nhật :

$$M_1\left(\frac{\sqrt{15}}{2}; \frac{1}{2}\right), M_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right), M_3\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}; -\frac{1}{2}\right), M_4\left(\frac{\sqrt{15}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

**Nhận xét.** Các cách giải khác cũng cho cùng kết quả.

*Cách 1.* Theo giả thiết :

$$\overrightarrow{F_1 M} \cdot \overrightarrow{F_2 M} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 + y^2 = 0.$$

*Cách 2.* Theo giả thiết :

$$\begin{aligned} F_1 M^2 + F_2 M^2 &= F_1 F_2^2 \Leftrightarrow (a + ex)^2 + (a - ex)^2 = 4c^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{2c^2 - a^2}{e^2} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.** Cho parabol  $(P): y^2 = 16x$ . Tìm điểm  $M \in (P)$  sao cho  $OM^2 + FM^2 = 72$  ( $F$  là tiêu điểm).

#### Giải

Theo giả thiết :

$$\begin{cases} y^2 = 16x \\ x^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16x \\ x^2 + 12x - 28 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16x \\ x = 2 \\ x = -14 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Ta tìm được hai điểm  $M_1(2; 4\sqrt{2})$ ,  $M_2(2; -4\sqrt{2})$ .

**Ví dụ 3.** Cho elip (E) :  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  và  $A(4; -3)$ ,  $B(-4; 3)$ . Tìm

$M \in (E)$  sao cho  $dt(\triangle MAB)_{\max}$ .

### Giải

Phương trình đường thẳng AB :  $3x + 4y = 0$ .

Ta có :  $M \in (E) \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t. \end{cases}$

Do AB cố định và do tính đối xứng của (E), ta xét  $x \geq 0$  và  $y \geq 0$ . Theo giả thiết :

$$d(M; (AB))_{\max} \Leftrightarrow \frac{(|6\cos t + 4\sin t|)}{5} \max$$

$$\Leftrightarrow |6\cos t + 4\sin t|_{\max}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho các số 6, 4,  $\cos t$ ,  $\sin t$ , ta có :

$$(6\cos t + 4\sin t) \leq \sqrt{52}.$$

Do đó :  $|6\cos t + 4\sin t|_{\max} = 2\sqrt{13}$ , đạt được khi :

$$6\sin t = 4\cos t \Leftrightarrow \tan t = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 t = \frac{1}{1 + \tan^2 t} = \frac{9}{13} \\ \sin^2 t = \frac{4}{13}. \end{cases}$$

Vậy ta tìm được hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là :

$$M_1\left(\frac{6}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}}\right), M_2\left(\frac{-6}{\sqrt{13}}; \frac{-2}{\sqrt{13}}\right).$$

#### Dạng 4. CHỨNG MINH MỘT TÍNH CHẤT CỦA CÔN IC

**Ví dụ 1.** Cho elip (E) :  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  có tiêu điểm là  $F_1$  và  $F_2$ .

Chúng minh rằng với mọi điểm  $M \in (E)$  thì giá trị của biểu thức  $OM^2 + F_1M \cdot F_2M$  không thay đổi khi M chạy trên elip (E).

##### Giải

Ta có : 
$$\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2 = 16 \\ e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{16}{25} \end{cases}.$$

$$\forall M(x; y) \in (E):$$

$$\begin{aligned} OM^2 + F_1M \cdot F_2M &= x^2 + y^2 + (a + ex)(a - ex) \\ &= x^2 + \frac{9}{25}(25 - x^2) + a^2 - e^2x^2 \\ &= x^2 + \frac{9}{25}(25 - x^2) + 25 - \frac{16}{25}x^2 \\ &= \frac{1}{25}(9 \cdot 25 + 25^2) = 9 + 25 = 34. \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.** Cho hypebol (H) :  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  và một điểm  $M_0(x_0; y_0)$

$\in (H)$ . Chúng minh tích các khoảng cách từ  $M_0$  đến hai đường tiệm cận của (H) không phụ thuộc vị trí của  $M_0$  trên (H).

##### Giải

Theo giả thiết (H) :  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9. \end{cases}$

Phương trình hai đường tiệm cận :

$$y = \pm \frac{3}{4}x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3x + 4y = 0. \end{cases}$$

Ta có :

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1 \\ p = \frac{|3x_0 - 4y_0|}{5} \cdot \frac{|3x_0 + 4y_0|}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_0^2 - 16y_0^2 = 144 \\ p = \frac{1}{25} |9x_0^2 - 16y_0^2| = \frac{144}{25}. \end{cases}$$

**Ví dụ 3.** Chứng minh trong mọi parabol, dây cung qua tiêu điểm ngắn nhất bằng hai lần khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn và xảy ra khi dây cung đó vuông góc với trục đối xứng.

**Giải**

$$\text{Xét parabol (P) : } y^2 = 2px \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \\ d(F; (\Delta)) = p > 0. \end{cases}$$

Xét dây cung NFM qua tiêu điểm F.

Đặt  $(Fx, FM) = \alpha$  ( $0 < \alpha < 180^\circ$ ). Kẻ  $MH \perp (\Delta)$ . Ta có :

$$M \in (P) \Leftrightarrow FM = HM = p + FM \cos \alpha \Leftrightarrow FM = \frac{p}{1 - \cos \alpha}. \quad (1)$$

Vì N, F, M thẳng hàng nên  $(Fx, FN) = \alpha + \pi$ . Do đó trong (1) thay  $\alpha$  bằng  $\alpha + \pi$  thì FM là FN. Vậy :

$$FN = \frac{p}{1 - \cos(\alpha + \pi)} = \frac{p}{1 + \cos \alpha}. \quad (2)$$

$$NM = FN + FM = \frac{p}{1 + \cos \alpha} + \frac{p}{1 - \cos \alpha} = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}.$$

$$(NM)_{\min} = 2p \Leftrightarrow (\sin^2 \alpha)_{\max} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow NM \perp Ox \text{ tại F.}$$

## Dạng 5. TẬP HỢP ĐIỂM LÀ MỘT CÔN IC

**Ví dụ 1.** Cho đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) tâm O, bán kính  $R = 2$ . Từ điểm M bất kì trên ( $\mathcal{C}$ ), kẻ  $MH \perp Ox$ . Gọi N là trung điểm của

MH. Tìm tập hợp điểm N khi M vẽ  $(\mathcal{C})$ .

### Giải

Phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$ :  $x^2 + y^2 = 4$ .

Cách 1.  $\forall M(x_0; y_0) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 4$ . (1)

Trung điểm N của MH có tọa độ là  $N\left(x_0; \frac{y_0}{2}\right)$ . Từ (1) suy ra :

$$x_N^2 + 4y_N^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x_N^2}{4} + y_N^2 = 1 \Rightarrow N \in (E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Vậy tập hợp điểm N là elip  $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Cách 2. } \forall M \in (\mathcal{C}) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \cos t \\ y_0 = 2 \sin t \end{cases} &\Rightarrow N \begin{cases} x_N = x_0 = 2 \cos t \\ y_N = \frac{y_0}{2} = \sin t \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{x_N^2}{4} + y_N^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1. \end{aligned}$$

Vậy N vẽ elip  $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

**Ví dụ 2.** Cho  $A(-1; 0)$  và  $B(1; 0)$ . Tìm tập hợp các điểm M sao cho các đường thẳng AM và BM có tích các hệ số góc bằng 4.

### Giải

$\forall M(x; y)$  với  $x \neq \pm 1$ , hệ số góc của AM là :

$$k_1 = \frac{y}{x+1} \quad (\text{do } \overrightarrow{AM} = (x+1; y)).$$

Hệ số góc của BM là :

$$k_2 = \frac{y}{x-1} \quad (\text{do } \overrightarrow{BM} = (x-1; y)).$$

Theo giả thiết :

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{y^2}{x^2 - 1} = 4 \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Tập hợp điểm M là một hypebol  $(H)$  có phương trình :

$$(H) : x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

**Ví dụ 3.** Cho  $A(-1; 0)$ ,  $B(1; 0)$  và đường thẳng  $(\Delta)$  có phương trình  $y = \sqrt{3}$ . Lấy điểm  $M$  bất kì trên  $(\Delta)$ . Tìm tập hợp điểm  $H$  là trực tâm của  $\triangle ABM$  khi  $M$  vẽ  $(\Delta)$ .

### Giải

Phương trình đường cao  $\triangle MAB$  vẽ từ đỉnh  $M$  :

$$x = x_0 \text{ (do } M(x_0; \sqrt{3}) \in (\Delta) \text{)}.$$

Ta có :  $\overline{AM} = (x_0 + 1; \sqrt{3})$ . Phương trình đường cao vẽ từ  $B$  :

$$(x_0 + 1)(x - 1) + \sqrt{3}(y - 0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)x + \sqrt{3}y - (x_0 + 1) = 0$$

Toạ độ trực tâm  $H$  :

$$\begin{cases} x_H = x_0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_H = \frac{(x_0 + 1) - (x_0 + 1)x_H}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x_0^2 - 1). & (2) \end{cases}$$

Khử  $x_0$  từ (1) và (2) ta được :

$$y_H = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x_H^2 - 1) \Leftrightarrow x_H^2 = 1 - \sqrt{3}y_H.$$

Vậy tập hợp các trực tâm  $H$  của  $\triangle MAB$  là parabol có phương trình  $x^2 = -\sqrt{3}y + 1$ .

## C. BÀI TẬP

**Bài 1.** Lập phương trình chính tắc elip (E) nếu :

1) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là  $x \pm 4 = 0$  và  $y \pm 3 = 0$ .

2) Một tiêu điểm  $(12; 0)$  và tâm sai  $e = 12/13$ .

3) Một đỉnh trục lớn  $(5; 0)$  và đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là  $x^2 + y^2 = 41$ .

4) Tiêu cự bằng 4 và tỉ số giữa hai trục là  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

**Bài 2.** Lập phương trình chính tắc elip (E) nếu :

- 1) Độ dài trục lớn bằng 10 và (E) đi qua  $M\left(-4; \frac{9}{5}\right)$ .
- 2) Đi qua hai điểm  $H(3; 2\sqrt{3})$  và  $K(3\sqrt{3}; 2)$ .
- 3) Đi qua  $M(8; 12)$  và bán kính đi qua tiêu điểm bên trái bằng 20.

**Bài 3.** Tìm tâm sai của elip nếu :

- 1) Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc vuông.
- 2) Khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng tiêu cự.

**Bài 4.** Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) thỏa :

- 1) Qua  $M(3\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$ ,  $N(-2\sqrt{3}; \sqrt{2})$ .
- 2) Qua  $P(3; 0)$  và phương trình các tiệm cận :  $4x \pm 3y = 0$ .
- 3) Qua  $Q(5; -3)$  và tâm sai  $e = \sqrt{2}$ .
- 4) Qua  $R(6; 3)$  và hai tiệm cận hợp thành góc  $60^\circ$ .

**Bài 5.** 1) Tìm phương trình chính tắc hypebol (H) có một tiêu điểm là  $(-10; 0)$ , phương trình hai đường tiệm cận là  $3x \pm 4y = 0$ . Tìm tiêu điểm kia.

2) Tìm điểm  $M \in (H)$  sao cho M nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.

3) Lấy điểm N bất kì trên (H). Chứng minh rằng giá trị biểu thức  $ON^2 - F_1N \cdot F_2N$  không phụ thuộc vào vị trí của N trên (H).

**Bài 6.** Cho  $A(3\cos t; 0)$ ,  $B(0; \sin t)$ . Tìm tập hợp các điểm M thỏa  $2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

**Bài 7.** Cho phương trình đường cong (C) :

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\cos t}x + 2x \tan t - 1 = 0, \quad \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} < t \leq \pi\right) \quad (1)$$

1) Chứng minh rằng với mọi t, (1) là phương trình đường tròn.

2) Tìm tập hợp tâm các đường tròn đó.



- Bài 8.** 1) Tìm phương trình chính tắc elip (E) biết tiêu cự  $2c = 2\sqrt{7}$ , độ dài hai trục tỉ lệ với 3 và 4.  
 2) Cho  $A(-5; -1)$ ,  $B(-1; 1)$ . Tìm vị trí của đường thẳng AB và (E).  
 3) Cho  $M \in (E)$ . Tính giá trị lớn nhất của  $dt(MAB)$ .

**Bài 9.** Lập phương trình chính tắc của parabol (P) nếu :

- 1) Tiêu điểm  $F(-2; 0)$ .
- 2) Đường chuẩn  $(\Delta): y = 1/2$ .
- 3) Trục đối xứng Ox và khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn bằng 3.
- 4) Dây cung vuông góc Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh đến dây cung đó bằng 1.
- 5) Trục đối xứng Oy và dây cung chắn bởi (P) trên đường thẳng  $2x + y = 0$  có độ dài bằng  $4\sqrt{5}$ .
- 6) Đi qua điểm  $M(16; -16)$ .

**Bài 10.** Cho parabol (P) :  $y^2 = 4x$ . Xét đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua tiêu điểm F của (P). Gọi A và B là hai giao điểm của  $(\Delta)$  và (P).

- 1) Chứng minh  $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = 1$ .
- 2) Cho biết  $AB = 16$ . Tính FA, FB.

### LỜI GIẢI

**Bài 1.** 1)  $a = 4$  và  $b = 3$ .

$$(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$2) \begin{cases} c = 12 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 12 \\ a = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b^2 = 25. \end{cases}$$

$$(E): \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

$$3) \begin{cases} a = 5 \\ a^2 + b^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b^2 = 16. \end{cases}$$

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$4) \begin{cases} c = 2 \\ \frac{2b}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = c^2 = a^2 - b^2 \\ 9b^2 = 5a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 5. \end{cases}$$

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

**Bài 2.** Phương trình (E) có dạng ( $a > b$ ) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2. \quad (1)$$

$$1) \begin{cases} a = 5 \\ b^2(16) + a^2\left(\frac{81}{25}\right) = a^2 b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b^2 = 9. \end{cases}$$

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$2) \begin{cases} 9b^2 + 12a^2 = a^2 b^2 \\ 27b^2 + 4a^2 = a^2 b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 36 \\ b^2 = 16. \end{cases}$$

$$(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

3)  $F_1(-c; 0)$  và  $F_2(c; 0)$  và  $M(8; 12) \in (E)$ . Ta có :

$$F_1 M^2 = (8 + c)^2 + (12 - 0)^2 = 20^2 \Leftrightarrow c^2 + 16c - 192 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 8 \\ c = -24 < 0 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Theo giả thiết :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 64 = c^2 = a^2 - b^2 \\ 64b^2 + 144a^2 = a^2 b^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 256 \\ b^2 = 192 \end{cases} \Rightarrow b^4 - 144b^2 - 9216 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} b^2 = 192 \\ b^2 = -48 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy :  $(E): \frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1.$

**Bài 3.** 1)  $F_1B_1F_2B_2$  là hình vuông tâm O  $\Leftrightarrow b = c \Rightarrow a = c\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

2)  $A_2B_2 = 2c$ . Vậy :

$$4c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (a^2 - c^2) \Leftrightarrow 5c^2 = 2a^2 \Rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow e = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1.$$

**Bài 4.** Phương trình (H) có dạng :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (1)$$

$$1) \begin{cases} 27b^2 - 12a^2 = a^2b^2 \\ 12b^2 - 2a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 6. \end{cases}$$

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1.$$

$$2) \begin{cases} a^2 = 9 \\ \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4. \end{cases}$$

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$3) \begin{cases} 25b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \\ 2a^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 = 16.$$

$$(H): x^2 - y^2 = 16.$$

$$4) \begin{cases} 36b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \\ \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 3. \end{cases}$$

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$\text{Bài 5. 1) } \begin{cases} c = 10 \\ \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ 16b^2 = 9a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 64 \\ b^2 = 36. \end{cases}$$

$$(H): \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1 \text{ và } F_2(10; 0).$$

$$2) \begin{cases} 36x^2 - 64y^2 = 2304 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 87,04 \\ y^2 = 12,96. \end{cases}$$

Ta được 4 điểm M :  $M_1(9,3; 3,6)$ ,  $M_2(9,3; -3,6)$ ,

$M_3(-9,3; 3,6)$ ,  $M_4(-9,3; -3,6)$ .

$$\begin{aligned} 3) ON^2 - F_1N.F_2N &= x^2 + y^2 - (ex + a)(ex - a) \\ &= x^2 + y^2 - (e^2x^2 - a^2) \\ &= (1 - e^2)x^2 + y^2 + a^2 = -36 + 64 = 28. \end{aligned}$$

**Bài 6.** Gọi  $M(x; y)$ , ta có :  $\overrightarrow{AM} = (x - 3\cos t; y)$ ,

$$\overrightarrow{BM} = (x; y - \sin t).$$

Theo giả thiết :

$$2\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 3\cos t) = 5x \\ 2y = 5(y - \sin t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\cos t \\ y = \frac{5}{3}\sin t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = 1.$$

$$\text{Bài 7. } \begin{cases} a = \frac{1}{\cos t} \\ b = -\tan t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet R^2 &= a^2 + b^2 - c = \frac{1}{\cos^2 t} + \tan^2 t + 1 = \frac{1 + \sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} \\ &= \frac{2}{\cos^2 t} > 0 \quad \forall t. \end{aligned}$$

$$\bullet x^2 - y^2 = \frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1 + \tan^2 t - \tan^2 t = 1.$$

Tập hợp tâm các đường tròn là hypebol :  $x^2 - y^2 = 1$ .

**Bài 8.** 1)  $\begin{cases} c = \sqrt{7} \\ \frac{b}{3} = \frac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = c^2 = a^2 - b^2 \\ 16b^2 = 9a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9. \end{cases}$

$$(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2) Phương trình AB :  $x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x+3}{2}$ .

Phương trình cho hoành độ giao điểm (E) và AB :

$$9x^2 + 16\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 = 144 \Leftrightarrow 13x^2 + 24x - 108 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,1 \\ x = -3,9. \end{cases}$$

Vậy AB cắt (E) tại hai điểm.

3)  $\overline{AB} = (4; 2) \Rightarrow AB^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$ .

Xét  $M \in (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow M \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$

$$d(M; (AB)) = d = \frac{|4 \cos t - 6 \sin t + 3|}{\sqrt{5}}.$$

$$dt(MAB)_{\max} \Leftrightarrow (|4 \cos t - 6 \sin t + 3|)_{\max}.$$

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho các số 4, -6,  $\cos t$ ,  $\sin t$ , ta có :

$$|4 \cos t - 6 \sin t| \leq \sqrt{52}.$$

Do đó :  $d = \frac{1}{\sqrt{5}} |4 \cos t - 6 \sin t + 3| \leq \frac{3 + 2\sqrt{13}}{\sqrt{5}}.$

Vậy :

$$dt(MAB)_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{(3 + 2\sqrt{13})}{\sqrt{5}} = 3 + 2\sqrt{13}.$$

**Bài 9.** 1)  $F(-2; 0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4 > 0 \\ y^2 = -2px = -8x. \end{cases}$

$$2) (\Delta): y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = 1 > 0 \\ x^2 = -2py = -2y \end{cases}$$

$$3) p = 3 \Rightarrow y^2 = \pm 2px = \pm 6x.$$

$$4) \text{Ta có } (1; 4) \in (P) \Leftrightarrow 16 = 2p(1) \Leftrightarrow p = 8.$$

$$\text{Vậy } (P): y^2 = \pm 16x.$$

5) Xét parabol có trục đối xứng là Oy :  $x^2 = 2py$ . Phương trình cho hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 + 4px = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{điểm gốc } O) \\ x = -4p (\text{điểm } A). \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } OA = \sqrt{16p^2 + 64p^2} = 4p\sqrt{5} (p > 0). \text{ Theo giả thiết :}$$

$$4p\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow p = 1.$$

$$\text{Vậy } x^2 = \pm 2y.$$

6) Do  $M(16; -16)$  thuộc góc phần tư thứ IV, phương trình parabol có dạng :

$$\begin{cases} y^2 = 2px : (-16)^2 = 2p(16) \Rightarrow p = 8; \\ x^2 = -2py : (16)^2 = -2p(-16) \Rightarrow p = 8. \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} y^2 = 16x; \\ x^2 = -16y. \end{cases}$$

**Bài 10.1)** Ta có :  $p = 2 \Rightarrow F(1; 0)$ . Đặt  $(Fx; \Delta) = t$ ,  $(0 \leq t \leq \pi)$ .

$$A \begin{cases} x = 1 + FA \cos t \\ y = FA \sin t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A \in (P) &\Leftrightarrow FA^2 \sin^2 t = 4 + 4FA \cos t \\ &\Leftrightarrow FA^2 \sin^2 t - 4FA \cos t - 4 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có : } \Delta' = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4.$$

$$\text{Do đó : } \begin{cases} FA = \frac{2 \cos t + 2}{\sin^2 t} = \frac{2(\cos t + 1)}{\sin^2 t} \\ FA = \frac{2(\cos t - 1)}{\sin^2 t} < 0 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy :  $FA = \frac{2(1 + \cos t)}{\sin^2 t}$ .

Thay  $t$  bằng  $\pi + t$ :

$$FB = \frac{2[1 + \cos(\pi + t)]}{\sin^2(\pi + t)} = \frac{2(1 - \cos t)}{\sin^2 t}.$$

Vậy :  $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{\sin^2 t}{2} \left( \frac{1 - \cos t + 1 + \cos t}{1 - \cos^2 t} \right) = 1.$

2) Ta có :

$$AB = 16 = FA + FB = \frac{2(1 + \cos t) + 2(1 - \cos t)}{\sin^2 t} = \frac{4}{\sin^2 t}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 t = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

•  $t = \frac{\pi}{6} : \begin{cases} FA = 4(2 + \sqrt{3}) \\ FB = 4(2 - \sqrt{3}) \end{cases}$

•  $t = \frac{5\pi}{6} : \begin{cases} FA = 4(2 - \sqrt{3}) \\ FB = 4(2 + \sqrt{3}) \end{cases}$

### D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** 1) Cho đường cong (C) có phương trình :  $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ .

Hãy cho biết tên, xác định các yếu tố chính và vẽ (C).

2) Cùng câu hỏi trên với  $y = \pm 2\sqrt{x^2 - 4}$ .

**Bài 2.** Cho điểm  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{13}}{4}\right)$ .

1) Lập phương trình chính tắc elip (E) đi qua điểm A và có tâm sai  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Xác định hai tiêu điểm  $F_1, F_2$ .

2) Tìm điểm  $M \in (E)$  sao cho  $\widehat{F_1MF_2} = 120^\circ$ .

3) Chứng minh rằng với mọi điểm  $N$  thuộc elip  $(E)$  thì giá trị của biểu thức  $4ON^2 - (F_1N - F_2N)^2$  không phụ thuộc vào vị trí của  $N$  trên  $(E)$ .

**Bài 3.** Lập phương trình chính tắc hypebol  $(H)$  thoả :

- 1) Trục ảo dài 12, tâm sai  $e = \frac{5}{4}$ .
- 2) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là  $2x \pm 1 = 0$  và  $y \pm 1 = 0$ .
- 3) Một đỉnh trục thực là  $(3; 0)$ , đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có phương trình  $x^2 + y^2 = 16$ .
- 4) Tiêu cự bằng 10 và hiệu số giữa hai trục bằng 2.
- 5) Tiêu điểm  $F_1(-5; 0)$  và  $F_2(5; 0)$ . Hai tiệm cận có phương trình  $y = \pm \frac{4}{3}x$ .

**Bài 4.** Tìm tập hợp tâm các đường tròn có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 4x \cos t - 2y \sin t + 3 \cos^2 t + \sin t \cos t = 0.$$

**Bài 5.** 1) Tìm phương trình chính tắc của  $(H)$  biết phương trình hai đường tiệm cận là  $x \pm 2y = 0$  và hai đỉnh trục thực là  $A_1(-2; 0)$ ,  $A_2(2; 0)$ .

2) Tìm  $M, N \in (H)$  sao cho  $\triangle A_1MN$  hoặc  $\triangle A_2MN$  đều.

**Bài 6.** Cho đường thẳng  $(\Delta): 3x + 4y = 0$  và điểm  $A(-3; 0)$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho  $2MA = 3d(M; (\Delta))$ .

**Bài 7.** 1) Lập phương trình chính tắc của elip  $(E)$  biết  $F_1(-\sqrt{5}; 0)$ ,  $F_2(\sqrt{5}; 0)$  là hai tiêu điểm và  $(E)$  đi qua  $M\left(2; -\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ .

2) Lập phương trình chính tắc của  $(H)$  có cùng tiêu điểm với  $(E)$  và  $(H)$  cũng đi qua điểm  $M$  nói trên.



**Bài 8.** Cho (H):  $9x^2 - 16y^2 = 144$ .

- 1) Xác định các tiêu điểm  $F_1, F_2$  của (H).
- 2) Tìm  $M \in (H)$  để hai bán kính qua tiêu điểm vẽ từ M vuông góc nhau.
- 3) Lập phương trình elip (E) có cùng tiêu điểm với (H) và (E) ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H).

**Bài 9.** Cho parabol (P) :  $y^2 = 4x$ . Xét đường thẳng ( $\Delta$ ) đi qua tiêu điểm F của (P), ( $\Delta$ ) cắt (P) tại M, N. Tìm tập hợp điểm I trung điểm của MN.

**Bài 10.** Cho đường cong (C) có phương trình :

$$\begin{cases} x = \frac{\cos t}{1 + \cos t} \\ y = \frac{\sin t}{1 + \cos t} \end{cases}$$

- 1) Chứng tỏ (C) là một parabol.
- 2) Chứng minh rằng đường thẳng  
 $(\Delta): (1 + \sqrt{3})x - y - 1 = 0$   
cắt (C) tại hai điểm A, B.

### HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.** 1)  $\begin{cases} y \geq 0 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1. \end{cases}$

(C) là nửa elip (phần nằm phía trên trục hoành) có trục lớn  $2a = 8$ , trục nhỏ  $2b = 6$ , tiêu cự  $2c = 2\sqrt{7}$ , tiêu điểm  $F_1(-\sqrt{7}; 0)$ ,  $F_2(\sqrt{7}; 0)$ .

2)  $y = \pm 2\sqrt{x^2 - 4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ . (C) là hypebol có trục thực  $2a = 4$ , trục ảo  $2b = 8$ , tiêu cự  $2c = 4\sqrt{5}$ , tiêu điểm  $F_1(-2\sqrt{5}; 0)$ ,  $F_2(2\sqrt{5}; 0)$ , tiệm cận  $y = \pm 2x$ .

**Bài 2.** 1) (E):  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} F_1(-\sqrt{3}; 0) \\ F_2(\sqrt{3}; 0) \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 - 2(a+ex)(a-ex)\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases}$

Ta có hai điểm cần tìm là hai đỉnh trục nhỏ  $B_1(0; -1)$ ,  $B_2(0; 1)$ .

3)  $\forall N \in (E) \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow 4ON^2 - (F_1N - F_2N)^2 = 4$ .

**Bài 3.** 1)  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ .

2)  $4x^2 - y^2 = 1$ .

3)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ .

4)  $\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$

5)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

**Bài 4.**  $\begin{cases} x = a = 2 \cos t \\ y = b = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin 2t > 0 (\forall t) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ (elip)} \end{cases}$

**Bài 5.** 1) (H):  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ .

2) Hướng dẫn: M, N đối xứng qua Ox. Gọi  $M(x_0; y_0) \in (H)$

Theo giả thiết:  $\begin{cases} x_0^2 - 4y_0^2 = 4 \\ \tan 30^\circ = \frac{|y_0|}{|x_0 - 2|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 4y_0^2 = 4 \\ 3y_0^2 = (x_0 - 2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_0^2 - 16x_0 + 28 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \text{ (loại)} \\ x_0 = 14 \end{cases}$

Vậy :  $\Delta A_2MN$  đều với  $M(14; 4\sqrt{3}), N(14; -4\sqrt{3})$ .

$\Delta A_1MN$  đều với  $M(-14; 4\sqrt{3}), N(-14; -4\sqrt{3})$ .

**Bài 6.**  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$

**Bài 7.** 1) (E) :  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$       2) (H) :  $225x^2 - 180y^2 = 500.$

**Bài 8.** 1)  $F_1(-5; 0), F_2(5; 0).$

2)  $M_1\left(\frac{4}{5}\sqrt{34}; \frac{9}{5}\right), M_2\left(-\frac{4}{5}\sqrt{34}; \frac{9}{5}\right),$   
 $M_3\left(\frac{4}{5}\sqrt{34}; -\frac{9}{5}\right), M_4\left(-\frac{4}{5}\sqrt{34}; -\frac{9}{5}\right).$

3) (H) :  $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1.$

**Bài 9.** Parabol (P) :  $y^2 = 2(x - 1).$

**Bài 10.** 1) Đặt  $u = \tan \frac{t}{2} \Rightarrow y^2 = 1 - 2x$  (parabol).

2) Phương trình cho tung độ giao điểm :

$$(1 + \sqrt{3})y^2 + 2y + 1 - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(0; -1) \\ B(2\sqrt{3} - 3; 2 - \sqrt{3}). \end{cases}$$

### ÔN TẬP CHƯƠNG III

#### A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 1.** Cho hai điểm  $A(-2; -1)$  và  $B(3; 4).$

1) Tìm điểm  $C \in Ox$  :  $\Delta CAB$  cân tại C.

2) Tìm điểm  $D \in Oy$  cách đều A và B.

3) Tìm điểm  $E \in Oy$  nhìn đoạn AB dưới một góc vuông.

- 4) Tìm điểm  $H \in Ox$  sao cho  $\widehat{HAB} = 45^\circ$ .
- 5) Tìm điểm  $I \in Ox$  sao cho  $dt(IAB) = \frac{5}{2}$ .
- 6) Tìm điểm  $K \in mp(Oxy)$  sao cho  $O$  là trọng tâm  $\triangle ABK$ .
- 7) Tìm điểm  $L \in Ox$  sao cho  $(LA^2 + LB^2)_{\min}$ .

**Bài 2.** Cho điểm  $A(1; 2)$  và  $B(3; 6)$ .

- 1) Tìm điểm  $C$  và  $D$  để  $ABCD$  là hình vuông có cạnh  $AB$ .
- 2) Tìm điểm  $E$  và  $F$  để  $AEBF$  là hình vuông nhận  $AB$  làm đường chéo.

**Bài 3.** Cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): (m-1)x + (m+1)y - 4 = 0;$$

$$(\Delta_2): mx + y + 2 = 0.$$

- 1) Chứng minh rằng  $(\Delta_1)$  cắt  $(\Delta_2)$  với mọi  $m$ .
- 2) Tính góc của  $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$ .
- 3) Chứng minh rằng khi  $m$  thay đổi, giao điểm của  $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$  chạy trên một đường cố định.

**Bài 4.** Cho điểm  $A(2; 3)$  và đường thẳng  $(\Delta): x - 2y - 1 = 0$ .

- 1) a) Tìm phương trình các cạnh hình vuông  $ABCD$ , nhận  $A$  làm đỉnh và cạnh  $BC$  trên  $(\Delta)$ .  
b) Viết phương trình hai đường chéo hình vuông.
- 2) Viết phương trình các cạnh hình vuông  $MNKH$ , nhận  $A$  làm tâm và cạnh  $MN$  trên  $(\Delta)$ .
- 3) Viết phương trình các cạnh hình vuông nhận  $A(2; 3)$  làm đỉnh và  $(\Delta)$  làm một đường chéo.

**Bài 5.** 1) Tìm phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua  $M(-5; 4)$  sao cho khoảng cách từ  $I(-1; 3)$  đến  $(\Delta)$  bằng 1.

- 2) Tìm phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  tâm  $I(-1; 3)$  biết rằng  $(\mathcal{C})$  có bán kính bằng với bán kính đường tròn  $x^2 + y^2 - 10x = 0$ .

3) Tìm phương trình đường thẳng (d) qua  $M(-5; 4)$  sao cho (d) cắt ( $\mathcal{C}$ ) tại A, B thoả một trong các điều kiện :

a) Dây AB nhận M làm trung điểm.

b)  $|\overline{AB}| = 6$ .

c)  $dt(IAB)_{\max}$ .

**Bài 6.** Cho đường tròn ( $\mathcal{C}_m$ ) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2mx - 2(m+1)y + 2m^2 - 22 = 0.$$

1) Tìm tập hợp tâm các đường tròn ( $\mathcal{C}_m$ ).

2) Cho  $m = 1$ . Tìm tập hợp những điểm M từ đó ta vẽ được hai tiếp tuyến vuông góc cho ( $\mathcal{C}_1$ ).

**Bài 7.** 1) Lập phương trình chính tắc elip (E) có hai tiêu điểm  $F_1(-2; 0)$ ,  $F_2(2; 0)$  và hai đỉnh trục lớn  $A_1(-3; 0)$ ,  $A_2(3; 0)$ .

2) Lập phương trình chính tắc hypebol (H) nhận  $F_1, F_2$  làm hai đỉnh trục thực và  $A_1, A_2$  làm hai tiêu điểm.

3) Lập phương trình chính tắc parabol (P) nhận  $F_1$  làm tiêu điểm và đường thẳng ( $\Delta$ ) vuông góc với  $F_1F_2$  tại  $F_2$  làm đường chuẩn.

**Bài 8.** Cho elip (E) :  $x^2 + 4y^2 = 4$  có hai đỉnh trục lớn là  $A_1, A_2$ . Xét đường thẳng ( $\Delta$ ) :  $x = m$  cắt (E) tại P, Q. Gọi M là giao điểm của  $A_1P$  và  $A_2Q$ . Tìm tập hợp điểm M.

**Bài 9.** Xét elip (E) :  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

1) Cho  $M \in (E)$ . Đặt  $(Ox, OM) = \alpha$ . Tính OM phụ theo  $\alpha$ .

2) Xét  $N \in (E)$  sao cho  $OM \perp ON$ . Chứng minh rằng giá trị biểu thức  $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$  không đổi.

3) Suy ra MN tiếp xúc với một đường tròn cố định.

**Bài 10.** Cho  $A(-1; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(3; 0)$ .

1) Cho  $N(0; m) \in Oy$  ( $m \neq 0$ ).

a) Viết phương trình đường thẳng  $(\Delta_1)$  vuông góc với BN tại B và đường thẳng  $(\Delta_2)$  vuông góc với CN tại C.

b) Tìm tập hợp các điểm  $M = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$ .

2) Tìm tập hợp các điểm Q sao cho tích hai hệ số góc của hai đường thẳng QA và QB bằng m (với  $m \geq -1$  và  $m \neq 0$ ).

### HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài 1.** 1)  $C(2; 0)$ .

2)  $D(0; 2)$ .

3)  $\begin{cases} E_1(0; -2) \\ E_2(0; 5) \end{cases}$

4)  $H(-2; 0)$ .

5)  $\begin{cases} I_1 \equiv O(0; 0) \\ I_2(-2; 0) \end{cases}$

6)  $K(-1; -3)$ .

7)  $L(x; 0) : u = LA^2 + LB^2 = 2x^2 - 2x + 30 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{59}{2}$

$u_{\min} = \frac{59}{2}$  khi  $x = \frac{1}{2}$ . Vậy  $L\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ .

**Bài 2.** 1)  $\begin{cases} C_1(7; 4) \\ D_1(5; 0) \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} C_2(-1; 8) \\ D_2(-3; 4) \end{cases}$ .

2)  $\begin{cases} E(4; 3) \\ F(0; 5) \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} E(0; 5) \\ F(4; 3) \end{cases}$ .

**Bài 3.** 1)  $D = \begin{vmatrix} m-1 & m+1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = -(m^2 + 1) \neq 0 \ (\forall m)$ .

2)  $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|m(m-1) + m+1|}{\sqrt{2m^2+2} \cdot \sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ (\forall m)$ .

Suy ra  $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\pi}{4}$ .

3) Với mọi  $m$ ,  $(\Delta_1)$  qua  $A(-2; 2)$  cố định,  $(\Delta_2)$  qua  $B(0; -2)$  cố định,  $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = M$ .

Khi  $m$  thay đổi, điểm  $M$  nhìn đoạn cố định  $AB$  dưới góc  $45^\circ$ , nên  $M$  chạy trên hai cung tròn chứa góc  $45^\circ$  nhận  $AB$  làm dây cung chung.

**Bài 4.** 1) a) Phương trình các cạnh qua  $A(2; 3)$ :

$$AB \perp (\Delta): 2x + y - 7 = 0.$$

$$AD // (\Delta): x - 2y + 4 = 0.$$

Hướng dẫn: Cạnh  $CD // AB$  và cách điểm  $A$  một đoạn là

$$AB = d(A; (\Delta)) = 5 \text{ nên } |7 + c| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = -12. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } CD: \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x + y - 12 = 0. \end{cases}$$

b) Đường chéo  $AC$  hợp với  $(\Delta)$  góc  $45^\circ$  nên suy ra:

$$\begin{cases} k = 3 \\ k = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$AC: \begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0. \end{cases} \quad BD: \begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ 3x - y - 8 = 0. \end{cases}$$

$$2) \text{ Cạnh } HK: x - 2y + 9 = 0.$$

$$\text{Hai cạnh còn lại: } 2x + y - 12 = 0; 2x + y - 2 = 0.$$

3) Hai cạnh qua  $A$  hợp với  $(\Delta)$  góc  $45^\circ$ :

$$3x - y - 3 = 0; x + 3y - 11 = 0.$$

$$\text{Hai cạnh kia: } 3x - y - 13 = 0; x + 3y - 1 = 0.$$

**Bài 5.** 1)  $(\Delta): \begin{cases} 8x + 15y - 20 = 0 \\ y = 4. \end{cases}$

$$2) (C): x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0.$$

$$3) a) 4x - y + 24 = 0. \quad b) 15x - 8y + 107 = 0.$$

c) Hướng dẫn: Đặt  $d(I; (d)) = m$  ( $0 < m < 5$ ). Ta có:

$$\begin{cases} x - y + 9 = 0 \\ 23x + 21y + 87 = 0. \end{cases}$$

**Bài 6.** 1) Tập hợp các tâm I là nửa đường thẳng :

$$(\Delta): \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x < \frac{23}{2}. \end{cases}$$

2) Tập hợp điểm M là đường tròn

$$(\mathcal{C}): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 45 = 0.$$

**Bài 7.** 1) (E):  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ .      2) (H):  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ .

3) (P):  $y^2 = -8x$ .

**Bài 8.** Hướng dẫn : Phương trình  $A_1P$  và  $A_2Q$  :

$$\sqrt{4 - m^2} x - 2(m + 2)y + 2\sqrt{4 - m^2} = 0;$$

$$\sqrt{4 - m^2} x + 2(m - 2)y - 2\sqrt{4 - m^2} = 0.$$

Do đó :  $M\left(\frac{4}{m}; \frac{\sqrt{4 - m^2}}{m}\right)$ . Điều kiện :  $\begin{cases} m \neq 0 \\ -2 \leq m \leq 2. \end{cases}$

Tập hợp điểm M là hypebol (H) :  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ .

**Bài 9.** 1)  $OM^2 = \frac{400}{16 \cos^2 \alpha + 25 \sin^2 \alpha}$ .

2)  $ON^2 = \frac{400}{16 \sin^2 \alpha + 25 \cos^2 \alpha}$ . Do đó :  $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{41}{400}$ .

3) Kẻ  $OH \perp MN \Rightarrow OH^2 = \frac{400}{41} \Rightarrow MN$  tiếp xúc với đường tròn  $\left(0; \frac{20}{\sqrt{41}}\right)$ .

**Bài 10.** 1) a)  $(\Delta_1): x - my - 1 = 0$  ;  $(\Delta_2): 3x - my - 9 = 0$ .

Do đó :  $M\left(4; \frac{3}{m}\right)$ .

b) Tập hợp điểm M là đường thẳng  $(\Delta): x = 4$ .



2) Phương trình tập hợp điểm Q là :

$$x^2 + \frac{y^2}{-m} = 1 \quad (m \geq -1 \text{ và } m \neq 0).$$

- $m = -1$  : Đường tròn tâm O, bán kính  $R = 1$ .
- $-1 < m < 0$  : Elip có độ dài trục lớn  $2a = 2$ , độ dài trục nhỏ  $2b = 2\sqrt{-m}$ .
- $m > 0$  : Hypebol có độ dài trục thực  $2a = 2$ , độ dài trục ảo  $2b = 2\sqrt{m}$ .

### B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(3 ; 2)$ ,  $B(-11 ; 0)$ ,  $C(5 ; 4)$ . Trọng tâm tam giác là điểm :

- A)  $G(-4 ; 1)$ .                      B)  $G(-1 ; 2)$ .  
C)  $G(-3 ; 2)$ .                      D)  $G(0 ; 3)$ .

**Câu 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(11 ; 0)$ ,  $B(-3 ; -2)$ ,  $C(1 ; -5)$ . Chân đường cao AH của tam giác ABC là điểm :

- A)  $H(5 ; -8)$ .                      B)  $H\left(-1 ; \frac{7}{2}\right)$ .  
C)  $H(-5 ; 8)$ .                      D) Kết quả khác.

**Câu 3.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(4 ; 3)$ ,  $B(-2 ; -1)$ ,  $C(8 ; -1)$ . Điểm  $M(4 ; 5)$  có quan hệ với tam giác là :

- A) Trọng tâm.  
B) Trục tâm.  
C) Tâm đường tròn ngoại tiếp.  
D) Tâm đường tròn nội tiếp.

**Câu 4.** Cho ba điểm  $A(-1 ; 0)$ ,  $B\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{2}\right)$ ,  $C\left(\frac{7}{3} ; 1\right)$ . Câu nào sau đây đúng ?

- A) A, B, C thẳng hàng.    B) Tam giác cân.  
C) Tam giác vuông.        D) Tam giác vuông cân.

- Câu 5.** Cho tứ giác  $A(-3; -2)$ ,  $B(5; -8)$ ,  $C(11; 0)$  và  $D(3; 6)$ . Câu nào sai?
- A)  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .                      B)  $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ .  
 C)  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ .                      D) ABCD là hình vuông.
- Câu 6.** Cho ba điểm  $A(-3; 1)$ ,  $B(\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$ ,  $C(3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ . Góc  $\widehat{ABC}$  có số đo:
- A)  $30^\circ$ .                      B)  $45^\circ$ .  
 C)  $60^\circ$ .                      D) Kết quả khác.
- Câu 7.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(3; 6)$ ,  $B(-9; -10)$ ,  $C(4; -1)$ . Góc  $\widehat{BAC}$  có số đo:
- A)  $30^\circ$ .                      B)  $45^\circ$ .  
 C)  $60^\circ$ .                      D)  $90^\circ$ .
- Câu 8.** Cho  $A(-3; 3)$  và  $B(4; 4)$ . Điểm  $M \in Oy$  nhìn AB dưới một góc vuông thì tung độ  $y_0$  là:
- A)  $y_0 = 0$ .                      B)  $y_0 = 7$ .  
 C)  $\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_0 = 7 \end{cases}$                       D)  $y_0 = 4$ .
- Câu 9.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(0; 5)$ ,  $B(-2; -1)$ ,  $C(4; 2)$ . Điểm  $N(2; 1)$  có quan hệ với tam giác là:
- A) Trục tâm.  
 B) Chân đường cao từ A.  
 C) Chân đường cao từ B.  
 D) Chân đường cao từ C.
- Câu 10.** Cho  $\triangle ABC$ ,  $A(5; -8)$ ,  $B(-3; -2)$ ,  $C(11; 0)$ . Câu nào sai?
- A)  $\triangle ABC$  cân tại A.                      B)  $\triangle ABC$  vuông tại A.  
 C)  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ .                      D)  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .
- Câu 11.** Cho ba điểm  $A(1; 6)$ ,  $B(-1; 8)$ ,  $C(3; 4)$ . Câu nào sai?
- A)  $\overline{AB} = \overline{AC}$ .                      B)  $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$ .

C)  $BC = 2BA$ . D)  $\overline{AB}$  cùng phương  $\overline{AC}$ .

**Câu 12.** Cho  $A(-2; -2)$ ,  $B(5; -4)$ ,  $C(-3; 6)$ . Xét ba mệnh đề :

(I)  $\triangle OAB$  có trọng tâm là  $G(1; -2)$ .

(II)  $\triangle OAB$  vuông tại  $O$ .

(III)  $\triangle ABC$  có trọng tâm là gốc  $O$ .

Tìm mệnh đề đúng ?

A) Chỉ (I) đúng.

B) Chỉ (III) đúng.

C) Cả (I), (III) đúng.

D) Cả (I), (II), (III) đúng.

**Câu 13.** Cho  $A(1; -5)$ ,  $B(4; -1)$ ,  $C(11; 0)$ ,  $D(5; -8)$ . Câu nào sai ?

A)  $\overline{AB}$  cùng phương  $\overline{CD}$ . B)  $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ .

C)  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ .

D)  $ABCD$  là hình thang vuông

**Câu 14.** Cho  $A(-1; 2)$ ,  $B(1; 6)$ ,  $C(3; 5)$ ,  $D(3; 2)$ . Để chứng minh  $ABCD$  nội tiếp, một học sinh chứng minh qua ba bước :

(I)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ$ .

(II)  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Rightarrow \widehat{ADC} = 90^\circ$ .

(III) Tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$  nên nội tiếp.

Chọn câu đúng :

A) Chỉ (I).

B) Chỉ (II).

C) Chỉ (III).

D) Cả (I), (II), (III).

**Câu 15.** Cho  $A(-3; -2)$ ,  $B(3; 6)$ ,  $C(11; 0)$ ,  $D(5; -8)$ . Đường thẳng  $AC$  quan hệ như thế nào với  $\triangle ABD$ .

A) Đường cao.

B) Đường trung bình.

C) Đường trung tuyến.

D) Đường phân giác.

**Câu 16.** Cho  $\triangle ABC$  với  $A(2; 4)$ ,  $B(-1; 0)$ ,  $C(10; -2)$ . Kẻ phân giác ngoài  $AM$  của góc  $\widehat{BAC}$  thì chân đường phân giác có toạ độ :

A)  $M(-12; 0)$ .

B)  $M(-12; 2)$ .

C)  $M(-12; 1)$ .

D)  $D(-13; 2)$ .

**Câu 17.** Cho  $A(3; 3)$ ,  $B\left(\frac{3-3\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$ . Hãy chọn câu đúng và đầy đủ nhất?

- A)  $OA = OB$ .  
 B)  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ .  
 C)  $AB = 3\sqrt{2}$ .  
 D)  $\triangle OAB$  đều cạnh bằng  $3\sqrt{2}$ .

**Câu 18.** Cho  $ABC$  có  $A(4; 3)$ ,  $B(-2; -1)$ ,  $C(8; -1)$ . Điểm  $M(3; -2)$  có quan hệ với tam giác là:

- A) Tâm đường tròn ngoại tiếp.  
 B) Tâm đường tròn nội tiếp.  
 C) Trọng tâm.  
 D) Trực tâm.

**Câu 19.** Cho  $A(-2; -1)$ ,  $B(3; 4)$ . Câu nào sai?

- A)  $M \in Ox$  sao cho  $MA = MB$  thì  $M(2; 0)$ .  
 B)  $N \in Oy$  sao cho  $\widehat{ANB} = 90^\circ$  thì  $N(0; -2)$  hay  $N(0; 6)$ .  
 C)  $P \in Oy$  sao cho  $A, P, B$  thẳng hàng thì  $P(0; 1)$ .  
 D)  $Q \in Ox$  sao cho  $\widehat{QAB} = 45^\circ$  thì  $Q(-2; 0)$ .

**Câu 20.** Cho  $A(-3; 2)$  và  $B(9; -4)$ . Điểm  $M \in Ox$  sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất thì  $M$  ở tại điểm:

- A)  $M_0(-3; 0)$ .  
 B)  $M_0(9; 0)$ .  
 C)  $M_0(1; 0)$ .  
 D) Gốc  $O$ .

**Câu 21.** Phương trình tổng quát của đường thẳng

$$(\Delta): 3x - 4y + 12 = 0.$$

Câu nào sai?

- A)  $(\Delta)$  có vector chỉ phương  $\vec{a} = (4; 3)$ .  
 B)  $(\Delta)$  có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (3; -4)$ .  
 C)  $(\Delta)$  có hệ số góc  $k = -\frac{4}{3}$ .  
 D)  $(\Delta)$  qua  $M(4; 6)$ .

**Câu 22.** Cho  $(\Delta)$  qua  $M(-1; 3)$  có vector chỉ phương  $\vec{a} = (-4; 3)$ .

Phương trình nào là phương trình của  $(\Delta)$  ?

A)  $-4(x+1) + 3(y-3) = 0$ .

B)  $4(x+1) - 3(y-3) = 0$ .

C)  $3(x-1) + 4(y+3) = 0$ .

D)  $3(x+1) + 4(y-3) = 0$ .

**Câu 23.** Cho  $(\Delta) : 3x - y + 6 = 0$ . Phương trình nào không phải là phương trình tham số ?

A)  $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t. \end{cases}$

B)  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3t. \end{cases}$

C)  $\begin{cases} x = t \\ y = 6 + 3t. \end{cases}$

D)  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 9 + 3t. \end{cases}$

Giả thiết sau đây dùng cho hai câu 24, 25 :

Cho hai đường thẳng :  $(\Delta) : mx + 2y - 1 = 0$  ;

$$(\Delta') : \frac{x+2}{3} = \frac{y}{1}.$$

**Câu 24.** Để  $(\Delta) \perp (\Delta')$  thì  $m$  có giá trị :

A)  $m = \frac{1}{6}$ .

B)  $m = 6$ .

C)  $m = -\frac{3}{2}$ .

D)  $m = +\frac{2}{3}$ .

**Câu 25.** Để  $(\Delta) // (\Delta')$  thì  $m$  có giá trị :

A)  $m = 6$ .

B)  $m = -\frac{2}{3}$ .

C)  $m = -\frac{3}{2}$ .

D)  $m = \frac{1}{6}$ .

**Câu 26.** Phương trình nào là phương trình của đường trung tuyến AD của tam giác ABC với  $A(4; 0)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(-1; 5)$  ?

$$A) \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -4t \end{cases}$$

$$B) \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$$

$$C) 3x + 4y = 0.$$

$$D) \frac{x-4}{-3} - \frac{y}{4}$$

**Câu 27.** Cho 4 phương trình :

$$A) 3x + 4y = 0 ;$$

$$B) 3x - 4y = 0 ;$$

$$C) 4x - 3y = 0 ;$$

$$D) 4x + 3y = 0.$$

Đường thẳng qua gốc O và vuông góc với đường thẳng  $(\Delta) : 4x - 3y + 5 = 0$  là phương trình ở câu nào ?

**Câu 28.** Góc giữa hai đường thẳng  $(\Delta) : 3x + y - 3 = 0$  và  $(d) : 2x - 6y - 2 = 0$  bằng :

$$A) 30^\circ.$$

$$B) 45^\circ.$$

$$C) 60^\circ.$$

$$D) 90^\circ.$$

**Câu 29.** Cho  $\Delta ABC$  có  $A(-4 ; 1)$ ,  $B(-2 ; 3)$ ,  $C(1 ; 4)$ . Đường thẳng  $(\Delta) : 3x + y + 11 = 0$  có quan hệ với tam giác là :

A) Trung tuyến từ A.

B) Đường cao từ A.

C) Đường cao từ B.

D) Phân giác từ C.

**Câu 30.** Cho  $A(-2 ; 6)$ ,  $B(-3 ; -1)$ ,  $C(9 ; 3)$ . Phương trình  $3x + y - 10 = 0$  là phương trình của đường nào trong  $\Delta ABC$ .

A) Đường cao từ A.

B) Trung tuyến tại A.

C) Trung trực cạnh BC.

D) Đường trung bình song song với AB.

**Câu 31.** Cho  $\Delta ABC$  có  $A(1 ; 4)$ ,  $B(-2 ; -2)$ ,  $C(8 ; 0)$ . Phương trình nào trong 4 câu sau là phương trình đường trung tuyến kẻ từ A.

$$A) 2x + 5y + 13 = 0.$$

$$B) 2x - 5y - 13 = 0.$$

$$C) 5x - 2y + 3 = 0.$$

$$D) 5x + 2y - 13 = 0.$$

**Câu 32.** Cho ba đường thẳng :  $(\Delta_1): 2x + y + 1 = 0$  ;

$$(\Delta_2): x - 2y - 3 = 0 ;$$

$$(\Delta_3): x + 2y + 5 = 0 .$$

Xét 4 mệnh đề :

A)  $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$  ;

B)  $(\Delta_1) \perp (\Delta_3)$  ;

C)  $(\Delta_2) \parallel (\Delta_3)$  ;

D) Cả 3 đều đúng.

Hỏi câu nào đúng ?

**Câu 33.** Cho 3 đường thẳng :  $(d_1): x - 2y + 1 = 0$  ;

$$(d_2): 3x + 2y - 5 = 0 ;$$

$$(d_3): (m - 1)x - 2(m + 1)y + 2m = 0 .$$

Để  $(d_1), (d_2), (d_3)$  cắt nhau tại một điểm,  $m$  nhận giá trị là :

A)  $m = 1$ .

B)  $m = 3$ .

C)  $m = -1$ .

D)  $m = 0$ .

**Câu 34.** Cho 3 điểm  $A(0 ; 1), B(3 ; 4), C(1 ; 0)$ . Đường thẳng  $(\Delta)$  qua C và hợp với AB góc  $45^\circ$  có phương trình :

A)  $y = 0$ .

B)  $x = 1$ .

C)  $y = x - 1$ .

D)  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ .

**Câu 35.** Cho 3 đường thẳng :  $(\Delta_1): 7x - y + 20 = 0$  ;

$$(\Delta_2): 3x + 11y - 60 = 0 ;$$

$$(\Delta_3): x - 3y = 0 .$$

$$(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = A, (\Delta_1) \cap (\Delta_3) = B, (\Delta_2) \cap (\Delta_3) = C .$$

Xét 4 đường thẳng :

A)  $3x + y = 0$  ;

B)  $x + 3y - 16 = 0$  ;

C)  $3x + y - 16 = 0$  ;

D)  $x + y - 10 = 0$ .

Đường thẳng nào là đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

**Câu 36.** Cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): (m-3)x + 2y + m^2 - 1 = 0;$$

$$(\Delta_2): -x + my + m^2 - 2m + 1 = 0.$$

Để  $(\Delta_1)$  cắt  $(\Delta_2)$ , tham số  $m$  được chọn là :

A)  $m \neq 0$ .

B)  $m \neq -1$ .

C)  $m \neq 3$ .

D)  $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$

**Câu 37.** Cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): mx - 2y - m = 0;$$

$$(\Delta_2): (m+1)x + my - 1 = 0.$$

Để  $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = A(1; 0)$  thì chọn tham số  $m$  là :

A)  $m = -1$ .

B)  $m = 1$ .

C)  $m = 0$ .

D) Không có  $m$ .

**Câu 38.** Cho hai đường thẳng song song :

$$(\Delta_1): x - y + 7 = 0;$$

$$(\Delta_2): x - y - 3 = 0.$$

Xét 4 đường thẳng :

A)  $x - y + 3 = 0$ .

B)  $x - y = 0$ .

C)  $x - y + 2 = 0$ .

D)  $-x + y + 2 = 0$ .

Đường thẳng nào song song và cách đều  $(\Delta_1), (\Delta_2)$  ?

**Câu 39.** Xét 4 đường thẳng :  $(\Delta_1): 3x + 4y - 25 = 0;$

$$(\Delta_2): 3x - 4y + 25 = 0;$$

$$(\Delta_3): 4x + 3y + 25 = 0;$$

$$(\Delta_4): 4x - 3y - 25 = 0.$$

Đường thẳng nào qua điểm  $A(-1; 7)$  sao cho khoảng cách từ gốc  $O$  đến đường thẳng đó bằng 5 ?

A)  $(\Delta_1)$ .

B)  $(\Delta_2)$ .

C)  $(\Delta_3)$ .

D)  $(\Delta_4)$ .



**Câu 40.** Cho  $A(5 ; -1)$ ,  $B(3 ; 7)$ ,  $C(-2 ; 3)$ . Gọi  $(\Delta)$  là đường thẳng qua  $C$  và  $(\Delta)$  cách đều  $A$  và  $B$ . Phương trình nào sau đây không phải là phương trình của  $(\Delta)$  ?

- A)  $y = 3$ .  
 B)  $\begin{cases} y = 3 \\ 4x + y + 5 = 0 \end{cases}$   
 C)  $4x + y + 5 = 0$ .  
 D)  $4x - y + 11 = 0$ .

**Câu 41.** Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn ?

- A)  $x^2 - y^2 - 2x + y = 0$ .  
 B)  $x^2 + y^2 + x - 2xy + 1 = 0$ .  
 C)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ .  
 D)  $2x^2 + 2y^2 + 3x - 2y - \frac{3}{8} = 0$ .

**Câu 42.** Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn có bán kính  $R = 1$  ?

- A)  $x^2 + y^2 = 4$ .  
 B)  $x^2 + y^2 + 2x = 0$ .  
 C)  $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$ .  
 D)  $x^2 + y^2 - 2(m-1)x + 2(m+2)y + 2m^2 + 2m + 2 = 0$ .

**Câu 43.** Cho 3 đường tròn :

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 - 6x &= 0 ; \\ (\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 &= 0 ; \\ (\mathcal{C}_3) : x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 &= 0 . \end{aligned}$$

Cặp đường tròn nào sau đây bằng nhau ?

- A)  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$ .  
 B)  $(\mathcal{C}_2)$  và  $(\mathcal{C}_3)$ .  
 C)  $(\mathcal{C}_3)$  và  $(\mathcal{C}_1)$ .  
 D) Không có cặp nào !

**Câu 44.** Cho phương trình đường cong :

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4mx + 2(m-1)y + (m-1)^2 = 0 .$$

Để  $(\mathcal{C})$  là đường tròn, hãy chọn kết quả đúng và đầy đủ nhất !

A)  $m = 0$ .

B)  $m \neq 0$ .

C)  $m > 0$ .

D)  $m = 1$ .

**Câu 45.** Cho phương trình đường tròn :

$$(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 2(m+2)y + 6m + 7 = 0.$$

Tập hợp tâm đường tròn khi  $m$  thay đổi là :

A) Đường thẳng.

B) Đoạn thẳng.

C) Hai nửa đường thẳng cùng thuộc đường thẳng.

D) Đường gấp khúc.

**Câu 46.** Cho hai điểm  $A(3 ; 0)$ ,  $B(0 ; -4)$ . Phương trình nào chỉ đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OAB$  ?

A)  $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ .

B)  $x^2 + y^2 - 3x + 8y = 0$ .

C)  $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 1 = 0$ .

D)  $x(x-3) + y(y+4) = 0$ .

**Câu 47.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$  và đường thẳng  $(\Delta): \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$ . Để  $(\Delta)$  cắt  $(\mathcal{C})$  tại hai giao điểm, hãy chọn kết quả đúng.

A)  $-5 < m < 1$ .

B)  $-1 < m < 5$ .

C)  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 5 \end{cases}$ .

D) Kết quả khác.

**Câu 48.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ . Tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại  $M(3 ; 0)$  là đường thẳng có phương trình :

A)  $x + y - 3 = 0$ .

B)  $x + y - 1 = 0$ .

C)  $x + 3y - 3 = 0$ .

D)  $3x + y = 0$ .

**Câu 49.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 2x = 0$ . Tiếp tuyến tại  $M(-1 ; 0)$  có phương trình :

A)  $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ .

B)  $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$ .

$$C) \begin{cases} x - y + \sqrt{3} = 0 \\ x + y + \sqrt{3} = 0. \end{cases}$$

$$D) \begin{cases} x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \\ x + \sqrt{3}y + 1 = 0. \end{cases}$$

**Câu 50.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$ . Cho biết đường thẳng  $(\Delta) : 4x - 3y + m - 1 = 0$  tiếp xúc  $(\mathcal{C})$ . Hãy chọn kết quả đầy đủ nhất.

$$A) m = 0.$$

$$B) \begin{cases} m = 0 \\ m = 25. \end{cases}$$

$$C) \begin{cases} m = 0 \\ m = 50. \end{cases}$$

$$D) \begin{cases} m = 25 \\ m = 50. \end{cases}$$

**Câu 51.** Đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại gốc O có phương trình là :

$$A) x^2 + y^2 = 1.$$

$$B) x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

$$C) x^2 + y^2 - 2(m^2 + 1)y = 0.$$

$$D) x^2 + y^2 - 2(m^2 + 1)y + m^2 + 1 = 0.$$

**Câu 52.** Chọn đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 = 1$  và điểm  $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Xét đường thẳng  $(\Delta) : x - \sqrt{3}y + m = 0$ , để  $(\Delta)$  là tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại M thì :

$$A) m = -2.$$

$$B) m = 0.$$

$$C) m = 2.$$

$$D) \text{Kết quả khác.}$$

**Câu 53.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2(m-1)x + m^2 + 1 = 0$ , để từ O ta kẻ được hai tiếp tuyến cho  $(\mathcal{C})$  thì chọn :

$$A) m < 0.$$

$$B) m < -1.$$

$$C) m > 0.$$

$$D) -1 < m < 0.$$

**Câu 54.** Cho hai đường tròn :

$$(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0;$$

$$(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0.$$

Tiếp tuyến chung của  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$  có phương trình :

A)  $y - 2 = 0$ .

B)  $y + 2 = 0$ .

C)  $x - y + 1 = 0$ .

D)  $x + y - 1 = 0$ .

**Câu 55.** Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn ?

A)  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$

B)  $\begin{cases} x = -2 + \cos t \\ y = 1 - \sin t \end{cases}$

C)  $\begin{cases} x = -2 + 2 \cos t \\ y = 1 - \sin t \end{cases}$

D)  $\begin{cases} x = -m \\ y = m^2 + 1 \end{cases}$

**Câu 56.** Cho hai đường tròn :

$$(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 ;$$

$$(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 56 = 0 .$$

So sánh vị trí hai đường tròn ta được kết quả : Hai đường tròn :

A) ngoài nhau.

B) trong nhau.

C) cắt nhau.

D) tiếp xúc nhau.

**Câu 57.** Cho hai đường tròn :

$$(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0 ;$$

$$(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0 .$$

Số tiếp tuyến chung của  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$  là :

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

**Câu 58.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 2mx + 4y + 6m - 9 = 0$ , để diện tích đường tròn đạt giá trị nhỏ nhất, ta chọn :

A)  $m = 3$ .

B)  $m = 0$ .

C)  $m = \frac{3}{2}$ .

D)  $m = \frac{2}{3}$ .

**Câu 59.** Cho điểm  $A(1 ; 2)$  nằm trong đường tròn

$$(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 .$$

Xét đường thẳng đi động  $(\Delta)$  có phương trình :

$$2(m-1)x + (3-m)y - 4 = 0.$$

Để  $(\Delta)$  quay quanh A và cắt  $(\mathcal{C})$  theo dây cung lớn nhất, ta chọn :

A)  $m = \frac{5}{3}$ .

B)  $m = \frac{3}{5}$ .

C)  $m = 1$ .

D)  $m = 3$ .

**Câu 60.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$ .  $(\mathcal{C})$  cắt trục hoành tại A, B. Điểm  $M \in (\mathcal{C})$  sao cho diện tích  $\Delta MAB$  đạt giá trị lớn nhất ở tại điểm  $M_0$  nào ?

A)  $M_0(7; 0)$ .

B)  $M_0(4; 9)$ .

C)  $M_0(0; 7)$ .

D)  $M_0(9; 4)$ .

**Câu 61.** Cho elip  $(E)$  có phương trình chính tắc :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0).$$

Phát biểu nào sau đây sai ?

A) Gọi  $2c$  là tiêu cự thì  $c^2 = a^2 - b^2$ .

B) Tâm sai  $e = \frac{c}{a} < 1$ .

C) Hai tiêu điểm  $F_1(-c; 0)$  và  $F_2(c; 0)$  thuộc Ox.

D)  $\forall M \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a \\ MF_1 \cdot MF_2 = a^2 - e^2 \end{cases}$ .

**Câu 62.** Cho elip có hai tiêu điểm  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$  và hai đỉnh trục nhỏ  $B_1(0; -b)$ ,  $B_2(0; b)$  sao cho  $b = c$ . Phát biểu nào sau đây sai ?

A) Trục lớn gấp đôi tiêu cự.

B) Tỷ số giữa trục lớn và trục nhỏ bằng  $\sqrt{2}$ .

C)  $F_1B_1F_2B_2$  là hình vuông.

D) Tâm sai  $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Câu 63.** Cho elip (E):  $x^2 + 5y^2 = 5$ . Phát biểu nào sau đây sai ?

A) Trục lớn bằng 10 và trục nhỏ bằng 2.

B) Tiêu cự bằng 4

C) Tiêu điểm  $F_1(-2; 0)$  và  $F_2(2; 0)$ .

D) Tâm sai  $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 64.** Cho elip (E):  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Phát biểu nào sau đây đúng ?

A) Tỷ số giữa trục lớn và trục nhỏ bằng  $\sqrt{3}$ .

B) Tiêu cự bằng 4.

C) Tâm sai  $e = 2/3$

D) Hai tiêu điểm  $F_1(-2; 0)$  và  $F_2(2; 0)$ .

**Câu 65.** Elip (E) có hình chữ nhật cơ sở diện tích bằng 8, chu vi bằng 6 thì phương trình chính tắc là :

A)  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ .

B)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ .

C)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ .

D)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Câu 66.** Elip (E) có tiêu điểm  $F_1(-4; 0)$  và  $F_2(4; 0)$ , tâm sai  $e = \frac{4}{5}$  thì phương trình :

A)  $4x^2 + 5y^2 = 20$ .

B)  $16x^2 + 25y^2 = 400$ .

C)  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .

D)  $9x^2 + 16y^2 = 144$ .

**Câu 67.** Elip đi qua điểm  $M\left(1; \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$  và có tiêu cự bằng  $2\sqrt{3}$  thì phương trình là :

A)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

B)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

C)  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ .

D)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$ .

**Câu 68.** Elip (E) đi qua hai điểm  $M(-2; 0)$  và  $N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  có phương trình là :

- A)  $x^2 + 4y^2 = 4$ .                      B)  $x^2 + 4y^2 = 1$ .  
C)  $x^2 + 2y^2 = 2$ .                      D)  $x^2 + 2y^2 = 1$ .

**Câu 69.** Cho elip có hai đỉnh trục lớn là  $A_1(-\sqrt{2}; 0)$ ,  $A_2(\sqrt{2}; 0)$  và tâm sai  $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$  thì phương trình chính tắc là :

- A)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .                      B)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ .  
C)  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ .                      D)  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ .

**Câu 70.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình elip ?

- A)  $x^2 - y^2 = 2$ .                      B)  $x^2 + y^2 = 2$ .  
C)  $x^2 + 2y^2 = 2$ .                      D)  $x^2 = 2y^2$ .

**Câu 71.** Phương trình nào sau đây là phương trình elip :

- A)  $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$                       B)  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = -2 \sin t \end{cases}$   
C)  $\begin{cases} x = -3 + \cos t \\ y = 2 - \sin t \end{cases}$                       D)  $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = 1 + \tan^2 t \end{cases}$

**Câu 72.** Cho hai elip  $(E_1): 4x^2 + 9y^2 = 36$  và  $(E_2): 5x^2 + 9y^2 = 45$ .

Câu nào sau đây sai ?

- A) Độ dài trục lớn của hai elip bằng nhau.  
B) Tâm sai của  $(E_1)$  lớn hơn tâm sai của  $(E_2)$ .  
C) Tiêu cự của  $(E_1)$  nhỏ thua tiêu cự của  $(E_2)$ .  
D) Diện tích hình chữ nhật cơ sở của  $(E_1)$  nhỏ thua diện tích hình chữ nhật cơ sở của  $(E_2)$ .

**Câu 73.** Cho hypebol (H) có phương trình :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Phát

biểu nào sau đây sai ?

A) Gọi  $2c$  là tiêu cự thì  $c^2 = a^2 + b^2$ .

B) Tâm sai  $e = \frac{c}{a} > 1$ .

C) Hai tiêu điểm  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$  thuộc Ox.

D) Một đường tiệm cận hợp với trục hoành góc  $\alpha$  mà  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ .

**Câu 74.** Cho hypebol (H) :  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ . Câu nào sau đây sai ?

A) Độ dài trục thực  $2\sqrt{3}$ .

B) Độ dài trục ảo 1.

C) Tiêu cự 4.

D) Tiêu điểm  $F_1(-2; 0)$ ,  $F_2(2; 0)$ .

**Câu 75.** Cho hypebol (H) :  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ . Câu nào sau đây sai ?

A) Trục thực nhỏ hơn trục ảo.

B) Tiêu cự bằng 10.

C) Tâm sai  $\frac{5}{3}$ .

D) Hai tiệm cận là  $y = \pm \frac{3}{4}x$ .

**Câu 76.** Cho hypebol có hai đỉnh trục thực là  $A_1(-3; 0)$ ,  $A_2(3; 0)$  và hai đỉnh trục ảo là  $B_1(0; -4)$ ,  $B_2(0; 4)$ . Câu nào sau đây sai ?

A) Trục thực nhỏ hơn trục ảo.

B) Phương trình chính tắc :  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ .

C) Hai đường tiệm cận :  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 0$ .



D) Tâm sai  $e = \frac{5}{3}$ .

**Câu 77.** Cho hypebol (H) có trục ảo bằng nửa trục thực và có độ dài bằng 4. Phương trình của (H) là :

A)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ .                      B)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ .  
C)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ .                      D)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Câu 78.** Phương trình hypebol có trục thực bằng 4, tâm sai  $e = \sqrt{2}$  là :

A)  $x^2 - y^2 = 2$ .                      B)  $x^2 - y^2 = 4$ .  
C)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ .                      D)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Câu 79.** Phương trình hypebol (H) đi qua điểm  $M\left(-3; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$  có tiêu cự  $2c = 2\sqrt{5}$  là :

A)  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ .                      B)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$ .  
C)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ .                      D)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ .

**Câu 80.** Phương trình hypebol (H) đi qua hai điểm  $M\left(-\sqrt{5}; \frac{1}{2}\right)$  và

$N\left(3; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$  là :

A)  $x^2 - 3y^2 = 3$ .                      B)  $x^2 - 5y^2 = 5$ .  
C)  $x^2 - 4y^2 = 4$ .                      D)  $x^2 - 4y^2 = 1$ .

**Câu 81.** Phương trình hypebol (H) có tiêu cự bằng 10, chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng 14 là :

A)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .                      B)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

$$\begin{array}{l} \text{C) } \left\{ \begin{array}{l} 9x^2 - 16y^2 = 144 \\ 16x^2 - 9y^2 = 144. \end{array} \right. \quad \text{D) Kết quả khác} \end{array}$$

**Câu 82.** Phương trình nào sau đây là phương trình hypebol ?

- A)  $x^2 - y^2 = 1$ .                      B)  $x^2 + y^2 = 1$ .  
C)  $3x^2 + 4y^2 = 12$ .                D)  $3x^2 - 4y^2 = 0$ .

**Câu 83.** Cho hypebol (H) :  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ . Gọi  $M_0$  là một điểm tùy ý trên (H). Tích các khoảng cách từ  $M_0$  đến hai đường tiệm cận có giá trị :

- A) 4.                                      B) 1.  
C)  $\frac{5}{4}$ .                                    D)  $\frac{4}{5}$ .

**Câu 84.** Cho elip (E) :  $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$  và hypebol (H) :  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ .

Phát biểu nào sau đây sai ?

- A) (E) và (H) có cùng tiêu cự.  
B) (E) và (H) có cùng tiêu điểm.  
C) Trục nhỏ của (E) bằng trục ảo của (H).  
D) (E) và (H) cùng tâm sai.

**Câu 85.** Cho elip (E) :  $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$  có tiêu điểm là  $F_1, F_2$  và hai đỉnh trục lớn  $A_1, A_2$ . Hypebol (H) nhận  $F_1, F_2$  làm hai đỉnh trục thực và  $A_1, A_2$  làm hai tiêu điểm có phương trình :

- A)  $x^2 - 4y^2 = 1$ .                      B)  $x^2 - 4y^2 = 4$ .  
C)  $x^2 - 5y^2 = 5$ .                      D)  $4x^2 - y^2 = 4$ .

Giả thiết sau dùng cho hai câu 86 và 87 : Cho  $k$  là số thực  $\neq 0$ . Xét phương trình  $kx^2 + y^2 = ka^2$  ( $a > 0$ ).

**Câu 86.** Để có phương trình đường elip (E). Ta chọn kết quả đúng

- A)  $k = -1$ .                      B)  $k > 1$ .  
C)  $0 < k < 1$ .                      D)  $k = 1$ .

**Câu 87.** Để có phương trình hypebol (H), hãy chọn kết quả đúng :

- A)  $k > 0$ .                      B)  $k < 0$ .  
C)  $k < 1$ .                      D)  $k > 1$ .

**Câu 88.** Xét phương trình  $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{|x^2 - 4|}$ . (1)

(1) là phương trình của :

- A) Hai đường elip.  
B) Hai đường hypebol.  
C) Một đường hypebol.  
D) Một đường elip và một đường hypebol.

**Câu 89.** Cho điểm  $A(-4 ; 0)$  và đường thẳng  $(\Delta)$  có phương trình  $x + \frac{25}{4} = 0$ . Tập hợp điểm M sao cho  $MA = \frac{4}{5}MH$  (với H

là hình chiếu của A trên  $(\Delta)$ ) là :

- A) Elip  $(E_1): 9x^2 + 25y^2 = 225$ .  
B) Elip  $(E_2): 16x^2 + 25y^2 = 400$ .  
C) Hypebol  $(H_1): 9x^2 - 25y^2 = 225$ .  
D)  $(H_2): 16x^2 - 25y^2 = 400$ .

**Câu 90.** Cho điểm A cố định ở ngoài đường thẳng  $(\Delta)$  cho trước.

Một góc vuông quay quanh A, hai cạnh góc vuông cắt  $(\Delta)$  tại B và C. Tập hợp các tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$  là :

- A) Một đường thẳng.                      B) Một đường tròn.  
C) Elip.                      D) Hypebol.

**Câu 91.** Parabol (P) có phương trình chính tắc là  $y^2 + \frac{3}{2}x = 0$ .

Câu nào sau đây sai ?

A) Trục đối xứng là Ox.    B)  $p = -\frac{3}{4}$ .

C) Tiêu điểm  $F\left(-\frac{3}{8}; 0\right)$ .    D) Đường chuẩn  $x = \frac{3}{8}$ .

**Câu 92.** Cho parabol (P) :  $x^2 = -2y$ . Câu nào sau đây sai ?

A) Trục đối xứng là Oy.    B) Tiêu điểm  $F\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ .

C) Đường chuẩn  $x = \frac{1}{2}$ .    D) (P) không qua điểm  $A(2; 2)$ .

**Câu 93.** Phương trình chính tắc của parabol (P) có trục đối xứng Oy và đi qua  $M(-2; -2)$  là :

A)  $y^2 = 2x$ .    B)  $y^2 = -2x$ .

C)  $x^2 = 2y$ .    D)  $x^2 = -2y$ .

**Câu 94.** Số phương trình chính tắc của parabol qua điểm  $M(4; -2)$  là :

A) 1.    B) 2.

C) 3.    D) 4.

**Câu 95.** Số phương trình chính tắc của parabol có tham số tiêu  $p = 1/4$  là :

A) 1.    B) 2.

C) 3.    D) 4.

**Câu 96.** Phương trình nào sau đây biểu diễn một parabol ?

A)  $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t. \end{cases}$     B)  $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = 1 + \tan^2 t. \end{cases}$

C)  $x^2 + y^2 = 1$ .    D)  $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -\sin t. \end{cases}$

**Câu 97.** Cho elip (E) :  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  có hai tiêu điểm  $F_1$  (bên trái) và  $F_2$  (bên phải). Phương trình chính tắc parabol nhận

$F_1$  làm tiêu điểm là :

A)  $y^2 = -4\sqrt{3}x$ .

B)  $y^2 = -2\sqrt{3}x$ .

C)  $y^2 = -\sqrt{3}x$ .

D)  $y^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ .

**Câu 98.** Cho hypebol (H) :  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  có đỉnh trực thực  $A_1$  (bên trái),  $A_2$  (bên phải). Phương trình parabol nhận  $A_2$  làm tiêu điểm là :

A)  $y^2 = 2x$ .

B)  $y^2 = 4x$ .

C)  $y^2 = 8x$ .

D)  $y^2 = 16x$ .

**Câu 99.** Cho parabol (P) có phương trình chính tắc  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ). Gọi  $(\Delta)$  là đường chuẩn, tiêu điểm là F. Câu nào sau đây đúng ?

A)  $\forall M \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M; (\Delta))$ .

B)  $\forall M(x; y) \in (P) \Rightarrow MF = \frac{p}{2} + x$ .

C) Gọi H là giao điểm của  $(\Delta)$  và trục đối xứng thì  $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .

D) Tất cả đều đúng.

**Câu 100.** Cho parabol (P) :  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ). Độ dài của dây cung parabol vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm bằng :

A) p.

B) 2p.

C) 3p.

D) 4p.

### GIẢI THÍCH - HƯỚNG DẪN

**Câu 1.**  $G: \begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(3 - 11 + 5) = -1 \\ y_G = \frac{1}{3}(2 + 0 + 4) = 2. \end{cases}$

Vậy  $G(-1; 2)$ . Câu B).

**câu 2.**  $H(x; y)$  là chân đường cao  $AH \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \overline{BH} \text{ cùng phương } \overline{BC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-11) - 3y = 0 \\ \frac{x+3}{4} = \frac{y+2}{-3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -8. \end{cases}$$

Vậy  $H(5; -8)$ . Câu A).

**câu 3.**  $\overline{AM} \cdot \overline{BC} = (0) \cdot (10) + 2(0) = 0 \Leftrightarrow AM \perp BC$ ;  
 $\overline{BM} \cdot \overline{CA} = (6)(-4) + (6)(4) = 0 \Leftrightarrow BM \perp CA$ .

Vậy M là trực tâm tam giác. Câu B).

**câu 4.**  $\overline{AB} = \left(\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $\overline{AC} = \left(\frac{10}{3}; 1\right) \Rightarrow 2\overline{AB} = \overline{AC}$ .

Vậy A, B, C thẳng hàng. Câu A).

**câu 5.**  $\begin{cases} \overline{AB} = (8; -6) \\ \overline{CD} = (-8; 6) \end{cases} \Rightarrow \overline{AB} = -\overline{CD}$ . Câu A).

**câu 6.**  $\overline{BA} = (-3 - \sqrt{3}; 1 - 3\sqrt{3})$ ,  $\overline{BC} = (2\sqrt{3}; -4\sqrt{3})$ .

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{ABC} = 75^\circ. \text{ Câu D).}$$

**câu 7.**  $\overline{AB} = (-12; -16)$ ,  $\overline{AC} = (1; -7)$ .

$$\cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BAC} = 45^\circ. \text{ Câu B).}$$

**câu 8.** Gọi  $M(0; y_0) \in Oy$ . Theo giả thiết :

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0 \Leftrightarrow (3)(-4) + (y_0 - 3)(y_0 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 - 7y_0 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0 \vee y_0 = 7. \text{ Câu C).}$$

**câu 9.**  $\overline{AN} = (2; -4)$ ,  $\overline{BC} = (6; 3)$ ,  $\overline{BN} = (4; 2)$ . Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow AN \perp BC \\ 2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow N \in BC. \end{cases}$$

Vậy N là chân đường cao từ A. Câu B).

**Câu 10.**  $\overrightarrow{BA} = (8; -6), \overrightarrow{BC} = (14; 2).$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ. \text{ Câu D).}$$

**Câu 11.**  $\overrightarrow{AB} = (-2; 2), \overrightarrow{AC} = (2; -2)$  suy ra  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$ . Câu A).

**Câu 12.**  $G'$  là trọng tâm  $\triangle OAB \Rightarrow G'(1; -2)$ .  $G' \equiv G$ . (I) đúng.

•  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (-2)(5) + (-2)(-4) = -2$ .

Góc  $\widehat{AOB} \neq 90^\circ$ . (II) sai.

• Gọi I là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\begin{cases} x_I = \frac{1}{3}(-2+5-3)=0 \\ y_I = \frac{1}{3}(-2-4+6)=0 \end{cases} \Rightarrow I \equiv O. \text{ (III) đúng.}$$

Vậy chọn câu C).

**Câu 13.**  $\overrightarrow{AC} = (10; 6), \overrightarrow{BD} = (1; -7)$ . Do đó :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (10)(1) + (6)(-7) = -32.$$

Vậy AC không vuông góc với BD. Câu C).

**Câu 14.** Câu D).

**Câu 15.**  $\overrightarrow{AB} = (6; 8), \overrightarrow{AC} = (14; 2), \overrightarrow{AD} = (8; -6).$

•  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$ .

•  $\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 45^\circ$ .

Vậy AC là phân giác góc  $\widehat{BAD}$ . Câu D).

**Câu 16.**  $\overrightarrow{AB} = (-3; -4) \Rightarrow AB = 5; \overrightarrow{AC} = (8; -6) \Rightarrow AC = 10$ .

Theo giả thiết :  $\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-1-x)=10-x \\ 2(0-y)=-2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-12 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy  $M(-12; 2)$ . Câu B).

**Câu 17.**  $\overrightarrow{OA} = (3; 3)$ ,  $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{3-3\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$ .

$$OA = OB = AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều cạnh bằng } 3\sqrt{2}.$$

Câu D).

**Câu 18.**  $\overrightarrow{MA} = (1; 5)$ ,  $\overrightarrow{MB} = (-5; 1)$ ,  $\overrightarrow{MC} = (5; 1)$ . Ta có :

$$MA = MB = MC = \sqrt{26} \Rightarrow M \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Câu A).}$$

**Câu 19.**  $N(0; y_0) \in Oy$ . Theo giả thiết :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} &= 0 \Leftrightarrow -6 + (y_0 + 1)(y_0 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow y_0^2 - 3y_0 - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ y_0 = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } N(0; -2), N(0; 5). \text{ Câu B).}$$

**Câu 20.** Do  $y_A \cdot y_B = -8 < 0 \Rightarrow A, B$  ở về hai phía đối với  $Ox$ . Ta có

$$MA + MB \geq AB \text{ nên :}$$

$$\begin{aligned} (MA + MB)_{\min} &= AB \Leftrightarrow M \Rightarrow M_0 \in AB \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM_0} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \frac{x_0 + 3}{12} = \frac{0 - 2}{-6} \Leftrightarrow x_0 = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M_0(1; 0). \text{ Câu C).}$$

**Câu 21.**  $3x - 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 3$ . Vậy  $k = \frac{3}{4}$ . Câu C).

**Câu 22.** Phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  qua  $M_0(x_0; y_0)$ , có vector chỉ phương  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  có dạng :

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0.$$

Câu D).



**Câu 23.**  $(\Delta): 3x - y + 6 = 0$ , suy ra  $M_0(-2; 0) \in (\Delta)$  và  $(\Delta)$  có vector chỉ phương  $\vec{a} = (1; 3)$ . Vậy :

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 - t \end{cases}$$

không phải là phương trình tham số của  $(\Delta)$ . Câu A).

Từ  $(\Delta): mx + 2y - 1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{m}{2}$ .

$$(\Delta'): \frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} \Rightarrow k' = \frac{1}{3}.$$

**Câu 24.**  $(\Delta) \perp (\Delta') \Leftrightarrow k \cdot k' = -1 \Leftrightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow m = 6$ . Câu B).

**Câu 25.**  $(\Delta) // (\Delta') \Leftrightarrow k = k' \Leftrightarrow -\frac{m}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$ . Câu B).

**Câu 26.** Trung điểm D của BC có tọa độ  $(0; 3)$ .

A) loại vì D  $(0; 3)$  không thỏa phương trình.

C) loại vì A  $(4; 0)$  không thỏa phương trình.

D) loại vì D  $(0; 3)$  không thỏa phương trình.

Vậy chọn câu B).

**Câu 27.** Cả 4 đường đều qua gốc O nhưng  $k_A = -\frac{3}{4}$  và  $k_\Delta = \frac{4}{3}$  suy ra  $k_A \cdot k_\Delta = -1$ . Câu A).

**Câu 28.** Ta có  $k_\Delta = -3$  và  $k_d = \frac{1}{3} \Rightarrow (\Delta) \perp (d)$ : góc  $90^\circ$ . Câu D).

**Câu 29.**  $A(-4; 1) \in (\Delta) \Rightarrow$  Câu B), D) loại. Trung điểm của BC là  $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right) \notin (\Delta)$ : câu A) loại. Vậy  $(\Delta)$  là đường cao từ A của tam giác ABC. Cụ thể:  $\vec{BC} = (3; 1)$  là vector pháp tuyến nên phương trình đường cao qua A  $(-4; 1)$ :

$$(\Delta): 3(x + 4) + 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 11 = 0.$$

Câu B).

**Câu 30.** Vì  $A(-2; 6)$  không thuộc đường thẳng đang xét nên loại câu A) và B). Trung điểm  $M$  của  $AC$  có tọa độ  $\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$  không thỏa phương trình, loại câu D). Vậy  $(\Delta)$  là đường trung trực cạnh  $BC$ . Cụ thể:  $\overrightarrow{BC} = (12; 4)$  cùng phương với  $\vec{a} = (3; 1)$ , trung điểm cạnh  $BC$  là  $N(3; 1)$ , suy ra đường trung trực của cạnh  $BC$  có phương trình:  $(\Delta): 3(x-3) + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 10 = 0$ . Câu C).

**Câu 31.** Tọa độ  $A(1; 4)$  không thỏa phương trình ở câu A) và B) nên loại hai câu này. Trung điểm của  $BC$  là  $M(3; -1)$  không thỏa phương trình câu C) nên loại câu này. Cụ thể:  $\overrightarrow{AM} = (2; -5)$  là vector chỉ phương. Vậy phương trình trung tuyến  $AM$  là:  $5(x-1) + 2(y-4) = 0 \Leftrightarrow 5x + 2y - 13 = 0$ . Câu D).

**Câu 32.**  $(\Delta_1): y = -2x - 1 \Rightarrow k_1 = -2$ ;  $(\Delta_2): y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2}$ ;  
 $(\Delta_3): y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow k_3 = -\frac{1}{2}$ . Do đó:

$$\begin{cases} (\Delta_1) \perp (\Delta_2) \\ (\Delta_1) \not\perp (\Delta_3) \\ (\Delta_2) \not\perp (\Delta_3) \end{cases}$$

Câu A).

**Câu 33.**  $(d_1) \cap (d_2) = A$  thì tọa độ  $A$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1).$$

Theo giả thiết:  $A(1; 1) \in (d_3) \Leftrightarrow m = 3$ . Câu B).

**Câu 34.** a) Xét  $(\Delta)$  qua  $C(1; 0)$  có hệ số góc  $k$ :  
 $y = k(x-1) \Leftrightarrow kx - y - k = 0$ .

Vecto chỉ phương  $\vec{a} = (1; k)$ .

$\overline{AB} = (3; 3)$  cùng phương với vectơ có toạ độ  $(1; 1)$ .

Theo công thức tính góc của hai đường thẳng :

$$\frac{|1+k|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |1+k| = \sqrt{1+k^2} \Leftrightarrow k = 0.$$

b) Xét  $(\Delta) // Oy : x = 1$ . Vectơ chỉ phương  $\vec{a} = (1; 0)$ . Ta có

$$\cos(\Delta, AB) = \frac{|1+0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{(\Delta, AB)} = 45^\circ.$$

Vậy  $(\Delta) : y = 0$  hoặc  $x = 1$ . Câu D).

**Câu 35.**  $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = A(-2; 6)$ . Gọi  $(d)$  là đường cao từ A. Theo giả thiết :  $A \in (d)$  và  $(d) \perp (\Delta_3)$ . Vậy : câu B), D) loại vì không vuông góc với  $(\Delta_3)$ . Câu C) loại vì không qua A.

Cụ thể :  $(d) : 3(x+2) + 1(y-6) = 0 \Leftrightarrow 3x + y = 0$ . Câu A).

**Câu 36.** Theo giả thiết :  $\begin{vmatrix} m-3 & 2 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$

Câu D).

**Câu 37.**  $x = \frac{\begin{vmatrix} m & -2 \\ 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & -2 \\ m+1 & m \end{vmatrix}}$  và  $y = \frac{\begin{vmatrix} m & m \\ m+1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & -2 \\ m+1 & m \end{vmatrix}}$  nên suy ra :

$$\begin{cases} x = \frac{m^2 + 2}{m^2 + 2m + 2} = 1 \Leftrightarrow m = 0 \\ y = \frac{-m^2}{m^2 + 2m + 2} = 0 \Leftrightarrow m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0. \text{ Câu C).}$$

**Câu 38.** Xét  $(\Delta) // (\Delta_1) : x - y + m = 0$ . Chọn  $M(0; m) \in (\Delta)$ . Theo giả thiết :

$$d(M; (\Delta_1)) = d(M; (\Delta_2)) \Leftrightarrow \frac{|0 - m + 7|}{\sqrt{2}} = \frac{|0 - m - 3|}{\sqrt{2}} \Rightarrow m = 2. \text{ Câu C).}$$

**Câu 39.** Yêu cầu  $d(0; (\Delta_i)) = 5$  đều thoả cho cả 4 câu. Mà  $A(-1; 7) \in (\Delta_1)$ , Câu A).

**Câu 40.** Vì đáp án A), C) hợp lại cho đáp án B) nên khả năng là đáp án D) không thoả phương trình  $(\Delta)$ . Kiểm tra đáp án D).

$$d(A; (D)) = \frac{|20 + 1 + 11|}{\sqrt{17}} = \frac{32}{\sqrt{17}};$$

$$d(B; (D)) = \frac{|12 - 7 + 11|}{\sqrt{17}} = \frac{16}{\sqrt{17}}.$$

Câu D). Cụ thể :

*Cách 1.* Xét

$(\Delta): y = 3 \Rightarrow c(-2; 3) \in (\Delta)$  và  $d(A; (\Delta)) = d(B; (\Delta)) = 4$  (thoả).

• Xét  $(\Delta): 4x + y + 5 = 0 \Rightarrow c(-2; 3) \in (\Delta)$ . Phương trình  $AB: 4x + y - 19 = 0 \Rightarrow AB // (\Delta)$  (thoả).

*Cách 2.* Xét  $(\Delta)$  qua  $C(-2; 3)$  có hệ số góc  $k$  :

$$(\Delta): y - 3 = k(x + 2) \Leftrightarrow kx - y + 2k + 3 = 0.$$

Theo giả thiết :

$$\frac{|5k + 1 + 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|3k - 7 + 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} \Leftrightarrow |7k + 4| = |5k - 4|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 4x + y + 5 = 0 \end{cases} \text{ (đúng).}$$

Chọn câu D).

**Câu 41.** Loại câu A), B). Với câu C) :  $R^2 = 1 + 4 - 6 = -1 < 0$  : loại.

Vậy chọn câu D).

Cụ thể : Phương trình ở câu D) tương đương với :

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - y - \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -3/4 \\ b = 1/2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{9}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = 1.$$

Đường tròn tâm  $\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $R = 1$ . Câu D).

**Câu 42.** Xét  $x^2 + y^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ .

Do đó :  $R^2 = a^2 + b^2 - c = 1 \Rightarrow R = 1$ . Câu B).

**Câu 43.**  $R_1^2 = 9 \Rightarrow R_1 = 3$ ;  $R_2^2 = 1 + 4 + 4 = 9 \Rightarrow R_2 = 3$ ;

$R_3^2 = 9 + 1 + 6 = 16 \Rightarrow R_3 = 4$ .

Vậy  $(\mathcal{C}_1) = (\mathcal{C}_2)$ . Câu A).

**Câu 44.**  $\begin{cases} a = 2m \\ b = -(m-1) \Rightarrow R^2 = a^2 + b^2 - c \\ c = (m-1)^2 \end{cases}$

$$= 4m^2 + (m-1)^2 - (m-1)^2$$

$$= 4m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Câu B).

**Câu 45.**  $\begin{cases} x = a = m+1 \\ y = b = m+2 \\ c = 6m+7 \end{cases} \Rightarrow R^2 = (m+1)^2 + (m+2)^2 - 6m - 7$

$$= 2(m^2 - 1).$$

$(\mathcal{C})$  là đường tròn  $\Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |m| > 1$ . Khi  $m$  giữa toạ độ  $x$  và  $y$  ta có :

$$\begin{cases} m = x-1 \\ y = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-1| > 1 \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \\ y = x+1 \end{cases} \quad \text{Câu C).}$$

**Câu 46.** Đường tròn (OAB) không qua  $A(3; 0)$  ở câu A) : loại.

Đường tròn (OAB) không qua  $B(0; -4)$  ở câu B) : loại.

Đường tròn (OAB) không qua  $O(0; 0)$  ở câu C) : loại.

Chọn câu D). Cụ thể : Đường tròn (OAB) có đường kính

AB. Vậy  $\forall M(x; y)$  thuộc đường tròn khi và chỉ khi :

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0 \Leftrightarrow x(x-3) + y(y+4) = 0. \text{ Câu D).}$$

**Câu 47.** ( $\mathcal{C}$ ) có tâm  $I(1; -2)$ ,  $R = \sqrt{3}$ . Theo giả thiết :

$$\begin{aligned} d(I; (\Delta)) < R &\Leftrightarrow \frac{|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2 + m^2}} < \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 5. \end{aligned}$$

Câu B).

**Câu 48.**  $M(3; 0) \in (\mathcal{C})$ . Phương trình tiếp tuyến tại  $M(3; 0)$  :

$$\begin{aligned} x_0x + y_0y - 2(x + x_0) + (y + y_0) + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x - 2(x + 3) + y + 3 &= 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0. \text{ Câu A).} \end{aligned}$$

**Câu 49.** Đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) có tâm  $I(1; 0)$ ,  $R = 1$ . Xét  $(\Delta)$  qua  $M(-1; 0) \notin (\mathcal{C})$  :  $y = k(x+1) \Leftrightarrow kx - y + k = 0$ . Theo giả thiết :

$$d(I; (\Delta)) = R \Leftrightarrow \frac{|2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } (\Delta): \begin{cases} x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \\ x + \sqrt{3}y + 1 = 0. \end{cases} \text{ Câu D).}$$

**Câu 50.** ( $\mathcal{C}$ ) có tâm  $I(-3; 4)$ , bán kính  $R = 5$ . Theo giả thiết :

$$\begin{aligned} d(I; (\Delta)) = R &\Leftrightarrow \frac{|4(-3) - 3(4) + m - 1|}{5} = 5 \\ &\Leftrightarrow |m - 25| = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 50. \end{cases} \text{ Câu C).} \end{aligned}$$

**Câu 51.** ▪ Loại câu A), D) vì đường tròn không qua gốc O.

▪ Với câu B). Tâm  $I(1; 0) \in Ox$  nên đường tròn không thể tiếp xúc với Ox. Loại câu C). Cụ thể :

Ở câu C) tâm  $I(0; m^2 + 1) \in Oy$  và  $R = m^2 + 1 > 0, \forall m$  nên đường tròn luôn luôn tiếp xúc với trục hoành tại gốc.

Câu C).

**Câu 52.** Ta có  $M \in (\mathcal{C})$ . Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại  $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (\mathcal{C})$  là :

$$\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y - 2 = 0.$$

Yêu cầu đề bài được thoả mãn khi  $m = -2$ . Câu A).

**Câu 53.**  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(m-1; 0)$ ,  $R = -2m$ . Yêu cầu đề bài được thoả khi và chỉ khi :

$$\begin{aligned} \begin{cases} R = -2m > 0 \\ OI > R \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ (m-1)^2 > 4m^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -1 < m < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 0. \end{aligned}$$

Câu D).

**Câu 54.**  $(\mathcal{C}_1)$  tâm  $I_1(4; 2)$ ,  $R_1 = 4$ ;  $(\mathcal{C}_2)$  tâm  $I_2(4; 0)$ ,  $R_2 = 2$ . Ta có  $I_1I_2 = |R_1 - R_2| = 2$ . Ta có  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$  tiếp xúc trong với nhau tại  $A(4; -2)$ . Phương trình đường nối tâm  $I_1I_2$ :  $x = 4$ . Ta loại hai câu C) và D) (không vuông góc với  $I_1I_2$ ). Câu A) bị loại vì không qua tiếp điểm  $A(4; -2)$ . Vậy chọn câu B).

**Câu 55.** Xét câu B).

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = -2 + \cos t \\ y = 1 - \sin t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = \cos^2 t \\ (y-1)^2 = \sin^2 t \end{cases} \\ &\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1. \text{ Câu B).} \end{aligned}$$

**Câu 56.**  $(\mathcal{C}_1)$  tâm  $I_1(1; -2)$ ,  $R_1 = 3$ ;  $(\mathcal{C}_2)$  tâm  $I_2(-2; 2)$ ,  $R_2 = 8$ .

Ta có  $I_1I_2^2 = 25 \Rightarrow I_1I_2 = 5$ ;  $|R_1 - R_2| = |-5| = 5$ . Vậy

$I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$  tiếp xúc trong.

Câu D).

**Câu 57.**  $(\mathcal{C}_1)$  có tâm  $I_1(6; 0)$ ,  $R_1 = 4$ ;  $(\mathcal{C}_2)$  có tâm  $I_2(3; 4)$ ,  $R_2 = 1$

Ta có :

$$I_1I_2^2 = 25 \rightarrow I_1I_2 = 5 ; R_1 + R_2 = 5 \text{ nên } I_1I_2 = R_1 + R_2.$$

Vậy  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$  tiếp xúc ngoài, có 3 tiếp tuyến chung.

Câu C).

**Câu 58.** Tâm  $I(m; -2)$ ;  $R^2 = m^2 + 4 - 6m + 9 = (m-3)^2 + 4 \geq 4$ .

Do  $S = \pi R^2$  nên  $S_{\min} = 4\pi \Leftrightarrow m = 3$ . Câu A).

**Câu 59.** Tâm của  $(\mathcal{C})$  là  $I(4; 3)$ . Ta có :

$$2(m-1)(1) + (3-m)(2) - 4 = 0, \forall m.$$

Vậy  $(\Delta)$  luôn luôn quay quanh điểm cố định  $A(1; 2)$ . Để  $(\Delta)$  cắt  $(\mathcal{C})$  theo một dây cung lớn nhất (đường kính) thì  $(\Delta)$  qua tâm  $I$ , tức là :

$$2(m-1)(4) + (3-m)(3) - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}. \text{ Câu B).}$$

**Câu 60.** Phương trình  $(\mathcal{C})$ :  $\begin{cases} x = 4 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t. \end{cases}$

Do  $A, B$  cố định nên  $\forall M(x; y) \in (\mathcal{C})$  thì :

$$S_{\max} = d(M; Ox)_{\max} \Leftrightarrow |y| = |4 + 5 \sin t|.$$

Ta có :  $|4 + 5 \sin t| \leq 4 + 5|\sin t| \leq 9$  (do  $|\sin t| \leq 1$ ). Do đó :

$$S_{\max} \Leftrightarrow y = 9 \Leftrightarrow \sin t = 1.$$

Vậy  $M \equiv M_0(9; 4)$ . Câu D).

**Câu 61.** Câu D) sai vì  $\forall M \in (E)$  thì :

$$\begin{cases} MF_1 = a + ex_M \\ MF_2 = a - ex_M \end{cases} \Rightarrow MF_1 \cdot MF_2 = a^2 - e^2 x_M^2.$$

**Câu 62.** Yêu cầu câu A) được thỏa khi  $a = 2c$ . Vậy :

$$b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2 \Leftrightarrow b = c\sqrt{3}.$$

Trái giả thiết  $b = c$ . Câu A) sai.



**Câu 63.**  $x^2 + 5y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ . Ta có  $a^2 = 5$  suy ra trục lớn

$2a = 2\sqrt{5}$ . Câu A) sai. Vậy chọn câu A).

**Câu 64.**  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$ . Các câu B), C),

D) sai. Chọn câu A).

**Câu 65.**  $\begin{cases} 2a \times 2b = 8 \\ 2a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$

Phương trình (E):  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . Câu B).

**Câu 66.** Ta có:  $\begin{cases} c = 4 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 = c^2 = a^2 - b^2 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3. \end{cases}$

Vậy (P):  $9x^2 + 25y^2 = 225$ . Câu C).

**Câu 67.** Theo giả thiết:  $\begin{cases} c^2 = a^2 - b^2 = 3 \\ b^2 + \frac{3}{4}a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1. \end{cases}$

(E):  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . Câu B).

**Câu 68.** Phương trình (E):

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \begin{cases} 4b^2 = a^2b^2 \\ b^2 + \frac{3}{4}a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

(E):  $x^2 + 4y^2 = 4$ . Câu A).

**Câu 69.**  $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 1. \end{cases}$

(E):  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ . Câu D).

**Câu 70.** A) Hypebol vuông góc ; B) Đường tròn ; D) Hai đường thẳng. Chọn câu C).

**Câu 71.** Xét câu B) :  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = -2 \sin t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$

Câu B).

**Câu 72.** Với  $(E_1): \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = \sqrt{5} \end{cases}$  ;  $(E_2): \begin{cases} a' = 3 \\ b' = \sqrt{5} \\ c' = 2. \end{cases}$

Vậy  $2c = 2\sqrt{5} < 2c' = 4$  là sai. Câu C).

**Câu 73.** Phương trình hai đường tiệm cận là  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , nên một đường có hệ số góc  $\tan \alpha = \frac{b}{a}$ . Câu D).

**Câu 74.** Xét :  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow c = 2.$

Các câu A), C), D) đúng  $\Rightarrow$  B) sai. Câu B).

**Câu 75.** Hai tiệm cận  $y = \pm \frac{4}{3}x$ . Câu D).

**Câu 76.** (E):  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ . Câu B).

**Câu 77.** Theo giả thiết :  $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ . Câu A).

**Câu 78.**  $\begin{cases} a = 2 \\ e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 4.$

(H):  $x^2 - y^2 = 4$ . Câu B).

**Câu 79.** (H):  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \begin{cases} 9b^2 - \frac{5}{4}a^2 = a^2b^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow 4b^4 + 21b^2 - 25 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ b^2 = -\frac{25}{4} \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow a^2 = 4. \text{ (H): } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1. \text{ Câu A).}$$

**Câu 80.** 
$$\begin{cases} 5b^2 - \frac{1}{4}a^2 = a^2b^2 \\ 9b^2 - \frac{5}{4}a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

(H):  $x^2 - 4y^2 = 4$ . Câu C).

**Câu 81.** 
$$\begin{cases} c=5 \\ a+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 = S^2 - 2P \\ a+b=7=S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=7 \\ P=12. \end{cases}$$

Vậy a, b là nghiệm phương trình  $t^2 - 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=3. \end{cases}$

Chọn  $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow (H_1): 9x^2 - 16y^2 = 144.$

Chọn  $\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow (H_2): 16x^2 - 9y^2 = 144.$

Câu C).

**Câu 82.** Câu B) : đường tròn ; câu C) : elip ; câu D) : hai đường thẳng. Vậy chọn câu A).

**Câu 83.** Phương trình hai tiệm cận là  $y = \pm \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} (\Delta_1): x+2y=0 \\ (\Delta_2): x-2y=0. \end{cases}$

Theo giả thiết :

$$\begin{cases} M_0(x_0; y_0) \in (H) \Leftrightarrow x_0^2 - 4y_0^2 = 4 \\ d = \frac{|x_0 + 2y_0|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|x_0 - 2y_0|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_0^2 - 4y_0^2|}{5} = \frac{4}{5}. \end{cases} \text{ Câu D).}$$

**Câu 84.** (E):  $a^2=5, b^2=1, c^2=4$  ; tâm sai  $e_E = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

(H):  $a^2=3, b^2=1, c^2=4$  ; tâm sai  $e_H = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

Do đó :  $e_E \neq e_H$ . Câu D).

Có thể giải quyết nhanh hơn :

$$\begin{cases} c_E < 1 \\ e_H > 1 \end{cases} \Rightarrow e_H = e_E \text{ là sai, Câu D).}$$

**Câu 85.**  $\begin{cases} c_E = 2 = a_H \\ a_E = \sqrt{5} = c_H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_H = 2 \\ b_H^2 = c_H^2 - a_H^2 = 1. \end{cases}$

Vậy (H) :  $x^2 - 4y^2 = 4$ . Câu B).

**Câu 86.**  $kx^2 + y^2 = ka^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ka^2} = 1.$

Yêu cầu đề bài :  $\begin{cases} k > 0 \\ a^2 > ka^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k < 1$ . Câu C).

**Câu 87.** Yêu cầu đề bài  $k < 0$ . Câu B).

**Câu 88.**  $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{|x^2 - 4|} \Leftrightarrow 4y^2 = |x^2 - 4|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = x^2 - 4 & (|x| \geq 2) \\ 4y^2 = 4 - x^2 & (|x| \leq 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \end{cases}$$

Câu D).

**Câu 89.** Xét  $M(x; y) : \begin{cases} MA^2 = (x+4)^2 + y^2 \\ MH = \left| \frac{25}{4} + x \right|. \end{cases}$

Yêu cầu đề bài :

$$\begin{aligned} 25MA^2 &= 16MH^2 \Leftrightarrow 25[(x+4)^2 + y^2] = 16\left(\frac{25}{4} + x\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225. \text{ Câu A).} \end{aligned}$$

**Câu 90.** Gọi M là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . Kẻ :

$$\begin{cases} ME \perp AB \\ MF \perp (\Delta) \end{cases} \Rightarrow ME = MF.$$

$\Delta AME$  vuông cân tại E nên :

$$\frac{MA}{MF} = \frac{ME\sqrt{2}}{MF} = \sqrt{2} > 1.$$

Tập hợp tâm M là hypebol vuông góc, nhận A làm tiêu điểm và  $(\Delta)$  là đường chuẩn. Câu D).

**Câu 91.**  $y^2 = -\frac{3}{2}x = -2\left(\frac{3}{4}\right)x \Rightarrow p = \frac{3}{4} > 0$ . Câu B).

**Câu 92.** Vì parabol nhận Oy làm trục đối xứng, nên đường chuẩn song song với trục hoành. Câu C).

**Câu 93.** Theo yêu cầu đề bài ta có  $(P): x^2 = -2py$ .

$$M(-2; -2) \in (P) \Leftrightarrow 4 = -2(p)(-2) \Rightarrow p = 1.$$

$(P): x^2 = -2y$ . Câu D).

**Câu 94.** Vì  $M(4; -2)$  ở góc phần tư thứ IV nên :

$$\begin{cases} (P): y^2 = 2px \\ (P): x^2 = -2py \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 1/2 \\ p = 4. \end{cases}$$

Vậy  $\begin{cases} (P): y^2 = x \\ (P): x^2 = -8y. \end{cases}$  Câu B).

**Câu 95.** Chỉ yêu cầu khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn  $p = 1/4$  nên  $(P)$  có 4 dạng. Câu D).

**Câu 96.** Xét câu B) :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = 1 + \tan^2 t \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = y. \text{ Câu B).}$$

**Câu 97.** Tiêu điểm trái  $F_1(-\sqrt{3}; 0) \Rightarrow \frac{p}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow p = 2\sqrt{3} > 0$ .

Phương trình  $(P): y^2 = -4\sqrt{3}x$ . Câu A).

**Câu 98.** Đỉnh trục thực phải  $A_2(4; 0)$ . Vậy  $\frac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow p = 8$ .

$(P): y^2 = 16x$ . Câu D).

**Câu 99.** Tất cả đều đúng. Câu D).

**Câu 100.** Do tính đối xứng qua Ox nên dây cung

$$MM' = 2MF = 2\left(\frac{p}{2} + x_M\right) = 2\left(\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right) = 2p. \text{ Câu B).}$$

Có thể lập luận cách khác :

Kẻ  $MH \perp (\Delta)$  và  $FK \perp (\Delta)$  thì MHKF là hình chữ nhật (3 góc vuông tại H, K, F). Ngoài ra  $MF = MH$  nên tứ giác là hình vuông. Vậy  $MF = FK = p$ .

### ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1	B	21	C	41	D	61	D	81	C
2	A	22	D	42	B	62	A	82	A
3	B	23	A	43	A	63	A	83	D
4	A	24	B	44	B	64	A	84	D
5	A	25	B	45	C	65	B	85	B
6	D	26	B	46	D	66	C	86	C
7	B	27	A	47	B	67	B	87	B
8	C	28	D	48	A	68	A	88	D
9	B	29	B	49	D	69	D	89	A
10	D	30	C	50	C	70	C	90	D
11	A	31	D	51	C	71	B	91	B
12	C	32	A	52	A	72	C	92	C
13	C	33	B	53	D	73	D	93	D
14	D	34	D	54	B	74	B	94	B
15	D	35	A	55	B	75	D	95	D
16	B	36	D	56	D	76	B	96	B
17	D	37	C	57	C	77	A	97	A
18	A	38	C	58	A	78	B	98	D
19	B	39	A	59	B	79	A	99	D
20	C	40	D	60	D	80	C	100	B

# MỤC LỤC

<b>Chương I. VECTOR</b> .....	3
§ 1. VECTOR – CÁC PHÉP TÍNH.....	3
A. Tóm tắt lí thuyết.....	3
B. Các dạng toán.....	6
Dạng 1. Chứng minh hai vector bằng nhau, hai vector	
đối nhau.....	6
Dạng 2. Chứng minh một đẳng thức vector.....	7
Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng.....	9
Dạng 4. Tìm tập hợp điểm.....	11
C. Bài tập.....	13
Lời giải.....	15
D. Bài tập tự luyện.....	20
Hướng dẫn – Đáp số.....	22
§ 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR.....	24
A. Tóm tắt lí thuyết.....	24
B. Các dạng toán.....	25
Dạng 1. Tính tích vô hướng.....	25
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức nhờ tích vô hướng.....	27
Dạng 3. Chứng minh hai vector vuông góc.....	29
Dạng 4. Tìm tập hợp điểm.....	30
C. Bài tập.....	33
Lời giải.....	34
D. Bài tập tự luyện.....	40
Hướng dẫn – Đáp số.....	42
<b>ÔN TẬP CHƯƠNG I</b> .....	44

<b>A. Bài tập tổng hợp.....</b>	<b>44</b>
Hướng dẫn – Đáp số .....	47
<b>B. Câu hỏi trắc nghiệm.....</b>	<b>50</b>
Giải thích – Hướng dẫn .....	59
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm Chương I.....	65
<b>Chương II. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC .....</b>	<b>66</b>
<b>VÀ ĐƯỜNG TRÒN .....</b>	<b>66</b>
<b>§ 1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC .....</b>	<b>66</b>
<b>A. Tóm tắt lí thuyết .....</b>	<b>66</b>
<b>B. Các dạng toán .....</b>	<b>67</b>
<b>Dạng 1.</b> Tính các yếu tố trong tam giác.....	67
<b>Dạng 2.</b> Chứng minh quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác.....	70
<b>Dạng 3.</b> Nhận dạng tam giác .....	71
<b>C. Bài tập .....</b>	<b>73</b>
Lời giải.....	75
<b>D. Bài tập tự luyện .....</b>	<b>79</b>
Hướng dẫn – Đáp số .....	80
<b>§ 2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN .....</b>	<b>82</b>
<b>A. Tóm tắt lí thuyết .....</b>	<b>82</b>
<b>B. Các dạng toán .....</b>	<b>84</b>
<b>Dạng 1.</b> Tính phương tích của một điểm đối với đường tròn.....	84
<b>Dạng 2.</b> Chứng minh tứ giác nội tiếp .....	85
<b>Dạng 3.</b> Chứng minh tiếp tuyến .....	86
<b>Dạng 4.</b> Chứng minh một quan hệ giữa các đoạn thẳng ....	88
<b>Dạng 5.</b> Dùng phương tích chứng minh điểm cố định .....	
Tìm tập hợp điểm.....	89
<b>Dạng 6.</b> Các bài toán có liên quan đến trục đẳng phương ..	90
<b>C. Bài tập .....</b>	<b>92</b>
Lời giải.....	94
<b>D. Bài tập tự luyện .....</b>	<b>98</b>



Hướng dẫn – Đáp số .....	101
<b>ÔN TẬP CHƯƠNG II</b> .....	102
<b>A. Bài tập tổng hợp</b> .....	102
Hướng dẫn – Đáp số .....	104
<b>B. Câu hỏi trắc nghiệm</b> .....	106
Giải thích – Hướng dẫn .....	114
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm Chương II .....	121
<b>Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOA ĐỘ TRONG</b> .....	
<b>MẶT PHẪNG</b> .....	122
<b>§ 1. HỆ TRỤC TOA ĐỘ</b> .....	122
<b>A. Tóm tắt lí thuyết</b> .....	122
<b>B. Các dạng toán</b> .....	124
<b>Dạng 1.</b> Xác định một điểm.....	124
<b>Dạng 2.</b> Chứng minh một tính chất của một hình .....	126
<b>C. Bài tập</b> .....	127
Lời giải.....	128
<b>D. Bài tập tự luyện</b> .....	132
Hướng dẫn – Đáp số .....	133
<b>E. Áp dụng phương pháp toạ độ chứng minh bất</b> .....	
<b>đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất</b> .....	134
<b>§ 2. ĐƯỜNG THẲNG</b> .....	138
<b>A. Tóm tắt lí thuyết</b> .....	138
<b>B. Các dạng toán</b> .....	140
<b>Dạng 1.</b> Viết phương trình đường thẳng.....	140
<b>Dạng 2.</b> Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng .....	142
<b>Dạng 3.</b> Tính góc giữa hai đường thẳng .....	144
<b>Dạng 4.</b> Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng .....	146
<b>C. Bài tập</b> .....	148
Lời giải.....	149
<b>D. Bài tập tự luyện</b> .....	153
Hướng dẫn – Đáp số .....	154
<b>§ 3. ĐƯỜNG TRÒN</b> .....	157

<b>A. Tóm tắt lí thuyết</b> .....	157
<b>B. Các dạng toán</b> .....	157
<b>Dạng 1.</b> Tìm tâm và bán kính của đường tròn .....	157
<b>Dạng 2.</b> Viết phương trình đường tròn .....	158
<b>Dạng 3.</b> Tiếp tuyến với đường tròn .....	160
<b>C. Bài tập</b> .....	162
Lời giải.....	164
<b>D. Bài tập tự luyện</b> .....	169
Hướng dẫn – Đáp số .....	171
<b>§ 4. BA ĐƯỜNG CÔNIC</b> .....	174
<b>A. Tóm tắt lí thuyết</b> .....	174
<b>B. Các dạng toán</b> .....	177
<b>Dạng 1.</b> Tìm các yếu tố của côníc.....	177
<b>Dạng 2.</b> Viết phương trình chính tắc của côníc .....	179
<b>Dạng 3.</b> Tìm một điểm trên côníc thoả tính chất ( $\rho$ ) .....	182
<b>Dạng 4.</b> Chứng minh một tính chất của côníc.....	184
<b>Dạng 5.</b> Tập hợp điểm là một côníc.....	185
<b>C. Bài tập</b> .....	187
Lời giải.....	189
<b>D. Bài tập tự luyện</b> .....	195
Hướng dẫn – Đáp số .....	197
<b>ÔN TẬP CHƯƠNG III</b> .....	199
<b>A. Bài tập tổng hợp</b> .....	199
Hướng dẫn – Đáp số .....	202
<b>B. Câu hỏi trắc nghiệm</b> .....	205
Giải thích – Hướng dẫn .....	225
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm Chương II .....	242
<b>MỤC LỤC</b> .....	243



*Chịu trách nhiệm xuất bản:*

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN. NGÔ TRẦN ÁI  
Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS. VŨ VĂN HÙNG

*Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:*

Giám đốc Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục tại Đà Nẵng PHAN QUANG THÂN  
Trợ lý Tổng biên tập ĐỖ VĂN THẢO

Biên tập lần đầu : NGUYỄN THANH PHƯƠNG – TRẦN PHƯỚC CHUÔNG

Biên tập tái bản : NGUYỄN VĂN NHO

Trình bày bìa : PHAN MINH NHẬT

Sửa bản in: MINH CHÂU

Chế bản : BAN BIÊN TẬP KHOA HỌC TỰ NHIÊN

---

Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục tại Đà Nẵng –  
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

---

## **CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HÌNH HỌC 10**

**Mã số :TXT49n4 – TTS**

Số đăng ký KHXB: 21 – 2014/CXB/700 – 2055/GD

In 1.500 bản, ( 109TK ), khổ 17 x 24 cm

Tại trung tâm nghiên cứu và sản xuất Học Liệu

In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2014